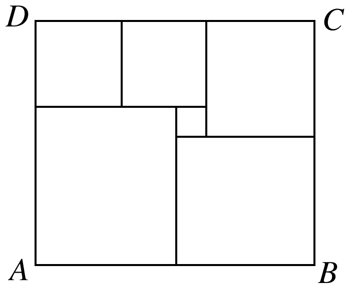
Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А   И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 8 април 2012 г.

Т Е М А   З А   4   К Л А С

Задача 1. *Дуорите* са същества, които имат два рога, а *хепторите* имат 7 рога. В едно стадо имало и от двата вида същества, а общият брой на рогата им бил 16. Колко дуори и хептори е имало в това стадо?

Задача 2. Даден правоъгълник $ABCD$ е съставен от шест квадрата, както е показано на чертежа. Намерете обиколката на правоъгълника, ако дължината на страната му AB е 546 см.



Задача 3. Във всяко квадратче на таблица 3×3 е записано числото 1. Казваме, че 3 квадратчета от таблицата образуват *тройка*, ако никои 2 от тях не са в един и същи ред или стълб. Извършва се следната операция: избира се *тройка* и към числата в квадратчетата от *тройката* се прибавя едно и също число.

1	**1**	**1**
1	**1**	**1**
1	**1**	**1**

а) Колко са различните *тройки*?

б) Проверете, че каквато и *тройка* да вземем, можем да намерим друга *тройка* така, че двете *тройки* да имат общо квадратче.

в) Възможно ли е след многократно прилагане на операцията числата във всички квадратчета на таблицата да се окажат различни?

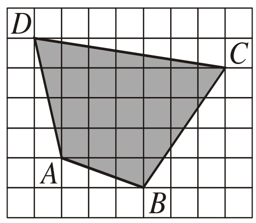
Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А   И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 8 април 2012 г.

Т Е М А   З А   5   К Л А С



Задача 1. Правоъгълникът на чертежа е съставен от еднакви квадратчета с дължина на страната цяло число сантиметри и има лице 252 кв.см. Да се намери лицето на четириъгълника *ABCD*.

Задача 2. Госпожата по математика даде следната домашна работа:

“Всеки да измисли задача с дроби, в която да участва числото 2012.“

Христо измисли следната задача: “Да се намери сумата на всички правилни, несъкратими, обикновени дроби със знаменател 2012.“ Задачата на брат му Петър беше: “Намерете сумата 0,0001 + 0,0002 + ... + 0,2012.“

Решете съставените от братята задачи и намерете коя от търсените суми е по-голяма и с колко.

Задача 3. В ребуса **КУЧЕ + ЗА + ЛОВ = 2012 + *n*** на различните букви в лявата страна съответстват различни цифри от 1 до 9 (без 0), а n е произволно естествено число.

а) Да се намери най-малкото естествено число n**,** за което ребусът има решение.

б) Ако $n = 2011$, намерете най-голямата възможна стойност на **КУЧЕ**, за която ребусът има решение.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 8 април 2012 г.

Т Е М А   ЗА   VI   К Л А С

Задача 1. Пирамида има височина h м и основа – правоъгълен триъгълник с катети a м и b м. Пресметнете обема на пирамидата, ако:

$$a = 7\frac{7}{24} + \frac{15}{7.(-2)^2} - 0,1:0,024 + \frac{5}{56}(-3)^3,\ b = \frac{35^5(-15)^2(-6)^7}{(-14)^5 15^8} \text{ и } h = \frac{-3,206-1,344}{1,821-5,071}.$$

Задача 2. Георги трябвало да умножи 11^3 с трицифреното число T, чиято цифра на единиците е два пъти по-голяма от цифрата на десетиците, а цифрата на стотиците му е с 5 по-голяма от цифрата на десетиците. Но той сгрешил при умножението и разменил мястото на единиците и десетиците на T. Така получил резултат, с 11979 по-голям от верния. Намерете T.

Задача 3. В магазин има дини по 5 *кг*, пъпеши по 2 *кг* и сливи по 50 *г*. Плодовете общо са 200 и тежат 100 *кг*. По колко плода от всеки вид може да има?

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 8 април 2012 г.

Т Е М А   З А   7   К Л А С

Задача 1. Да се намерят всички цели решения на уравнението $2xy + x - 2y = 2012$.

Задача 2. В четириъгълника *ABCD* страните *BC* и *AD* са равни, а точките *M* и *N* са техните среди. Да се докаже, че симетралите на *AC*, *BD* и *MN* се пресичат в една точка.

Задача 3. В квадрат 3×3, съставен от 9 малки квадратчета, във всяко квадратче е записано всяко едно от числата от 1 до 9. За всеки от четирите подквадрата 2×2 е пресметнат сборът от записаните числа. Най-малкият от четирите сбора наричаме характеристика на квадрата. Да се намери най-голямата възможна характеристика на квадрата.

Всяка задача се оценява със 7 точки.
Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 8 април 2012 г.

Т Е М А   З А   8   К Л А С

Задача 1. Сред учениците от 8 клас на едно училище провели анкета – кой обича да гледа футбол и кой – баскетбол. Оказало се, че 90% от любителите на футбола обичат и баскетбол, а 72% от любителите на баскетбола обичат и футбол. От запитаните 10% не обичат нито футбол, нито баскетбол. Колко процента от анкетираните обичат само един спорт? Какъв е възможно най-малкият брой анкетирани?

Задача 2. Върху страните AB, BC и AC на равностранния триъгълник ABC са взети съответно точки M, N и P такива, че $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}=\frac{1}{2}$. Върху отсечката PM е взета точка Q такава, че $\frac{PQ}{QM}=\frac{1}{2}$. Да се намерят ъглите на триъгълник AQN.

Задача 3. Нека $ABCD$ е квадрат с дължина на страната 10. Да се намери максималният брой точки, които могат да бъдат разположени във вътрешността на квадрата, така че всеки квадрат с дължина на страната 1 и страни, успоредни на страните на $ABCD$, да съдържа (включително по контура си) най-много 4 точки.

Всяка задача се оценява със 7 точки.
Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

Министерство на образованието, младежта и науката

61. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, първи ден, 8 април 2012 г.

Тема за 9. клас

Задача 1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}=x$$

има целочислено решение.

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$. Външновписаната окръжност към страната BC има център J и се допира до правите AB и AC съответно в точки E и F. Ако BJ и CJ пресичат EF съответно в точки P и Q, и $BC = 2PQ$, да се намери $\sphericalangle BAC$.

Задача 3. Нека a е естествено число, а p е просто число. Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа n, за които числото $a^{p^n}+p^n$ има поне два различни прости делителя.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието, младежта и науката

61. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, първи ден, 8 април 2012 г.

Тема за 10. клас

Задача 1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\sqrt[3]{1+3^x}+\sqrt[3]{1-3^x}=a$$

има решение.

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$. Външновписаната окръжност към страната BC има център J и се допира до правите AB и AC съответно в точки E и F. Ако BJ и CJ пресичат EF съответно в точки P и Q, и $BC = 2PQ$, да се намери $\sphericalangle BAC$.

Задача 3. Нека a е естествено число, а p е просто число. Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа n, за които числото $a^{p^n}+p^n$ има поне два различни прости делителя.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието, младежта и науката

61. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, първи ден, 8 април 2012 г.

Тема за 11. клас

Задача 1. Да се намерят всички цели стойности на параметъра a, за които уравнението

$$\sin x + a\sin 2x + \sin 5x = 2a$$

има решение.

Задача 2. В остроъгълен $\triangle ABC$ с ортоцентър H и среда M на страната AB, ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ пресича HM в точка T. Да се докаже, че:

а) $\dfrac{HT}{TM} = \dfrac{2\cos\gamma}{1-\cos\gamma}$, където $\gamma = \sphericalangle ACB$.

б) H лежи на отсечката с краища петите на перпендикулярите от T към AC и BC.

Задача 3. Разглеждаме ъгли, съставени от едно ъглово квадратче, 2012 хоризонтални съседни и 2012 вертикални съседни квадратчета.

Колко най-много ъгли могат да се разположат върху безкрайна клетъчна дъска така, че всеки два ъгъла да имат поне едно общо квадратче?

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието, младежта и науката

61. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, първи ден, 8 април 2012 г.

Тема за 12. клас

Задача 1. Да се намерят всички цели стойности на параметъра a, за които уравнението

$$\sin x + a \sin 2x + \sin 5x = 2a$$

има решение.

Задача 2. В остроъгълен $\triangle ABC$ с ортоцентър H и среда M на страната AB, ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ пресича HM в точка T. Да се докаже, че:

а) $\dfrac{HT}{TM} = \dfrac{2\cos\gamma}{1-\cos\gamma}$, където $\gamma = \sphericalangle ACB$.

б) H лежи на отсечката с краища петите на перпендикулярите от T към AC и BC.

Задача 3. Естествените числа са оцветени в два цвята.

а) Да се докаже, че съществуват безбройно много двойки от различни едноцветни числа x и y, за които $x + y$ е точен квадрат.

б) Вярно ли е, че винаги съществуват две различни едноцветни числа x и y, чиито сбор е степен на двойката?

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието, младежта и науката

61. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, втори ден, 9 април 2012 г.

Тема за 9. клас

Задача 4. Дадени са полиномите $f(x) = x^3 + ax + b$ и $g(x) = x^3 + a^2x^2 + b^2$, където a и b са реални параметри. Да се намерят всички стойности на a и b, за които точно едно от числата -2, -1 и 1 е общ корен за $f(x)$ и $g(x)$.

Задача 5. Даден е $\triangle ABC$ с центрове I_a и I_b на външновписаните окръжности към страните BC и AC съответно. Ако M е среда на страната AB и правите MI_a и MI_b пресичат страните BC и AC съответно в точки Q и P, да се докаже, че правата PQ е успоредна на AB и минава през центъра I на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 6. Дадена е компания от n души, n нечетно, в която има поне двама, които не се познават, и в която всички имат един и същ брой познати. Колко най-малко хора трябва да си тръгнат, за да остане група, в която всеки двама се познават?

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието, младежта и науката

61. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, втори ден, 9 април 2012 г.

Тема за 10. клас

Задача 4. Дадени са полиномите $f(x) = x^3 + ax + b$ и $g(x) = x^3 + a^2x^2 + b^2$, където a и b са реални параметри. Да се намерят всички стойности на a и b, за които точно едно от числата -2, -1 и 1 е общ корен за $f(x)$ и $g(x)$.

Задача 5. Даден е $\triangle ABC$ с центрове I_a и I_b на външновписаните окръжности към страните BC и AC съответно. Ако M е среда на страната AB и правите MI_a и MI_b пресичат страните BC и AC съответно в точки Q и P, да се докаже, че правата PQ е успоредна на AB и минава през центъра I на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 6. Дадена е компания от n души, n нечетно, в която има поне двама, които не се познават, и в която всички имат един и същ брой познати. Колко най-малко хора трябва да си тръгнат, за да остане група, в която всеки двама се познават?

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието, младежта и науката

61. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, втори ден, 9 април 2012 г.

Тема за 11. клас

Задача 4. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\lg(\lg(x^3 + ax + 1)) = \lg(\lg(2x^3 + a))$$

има точно едно решение.

Задача 5. Да се намерят всички прости числа p и q, за които pq дели $12^{p+q} - 1$ и $p = q + 2$.

Задача 6. Нека a е реално число и $P(x)$ е неконстантен полином с реални коефициенти така, че $P(x^2 + a) = (P(x))^2$ за всяко реално число x. Да се докаже, че $a = 0$.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието, младежта и науката

61. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, втори ден, 9 април 2012 г.

Тема за 12. клас

Задача 4. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\lg(\lg(x^3 + ax + 1)) = \lg(\lg(2x^3 + a))$$

има точно едно решение.

Задача 5. а) Да се намери броят на реалните корени на уравнението $x = \cos x$.

б) Нека $a_1, a_2, \ldots$ е редица от реални числа, за които $a_{n+1} = \cos a_n$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че редицата е сходяща.

Задача 6. Нека a е реално число и $P(x)$ е неконстантен полином с реални коефициенти така, че $P(x^2 + a) = (P(x))^2$ за всяко реално число x. Да се докаже, че $a = 0$.

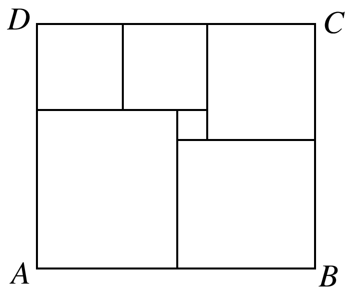
Време за работа: 4 часа и 30 минути.

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ

Задача 4.1. *Дуорите* са същества, които имат два рога, а *хепторите* имат 7 рога. В едно стадо имало и от двата вида същества, а общият брой на рогата им бил 16. Колко дуори и хептори е имало в това стадо?

Решение: Веднага се вижда, че стадото би могло да се състои от 8 дуори, тъй като $8\times 2=16$. Но по условие в стадото има поне един хептор, така че броят на дуорите в него е по-малък или равен на 7 **(2 т.)**. Общият брой на дуорите не може да е равен или по-голям от 5, тъй като $16-2\times 5=6$, а по условe хепторът има 7 рога **(2 т.)**. Тогава броят на дуорите в стадото може да е 1, 2, 3 или 4. **(1 т.)** С последователна проверка установяваме, че в това стадо трябва да има точно 1 дуор и два хептора. **(2 т.)**

Задача 4.2. Даден правоъгълник $ABCD$ е съставен от шест квадрата, както е показано на чертежа. Намерете обиколката на правоъгълника, ако дължината на страната му AB е 546 см.



Решение: Да означим с a см дължината на страната на двата еднакви квадрата в горния ляв ъгъл на правоъгълника $ABCD$, а с b см – дължината на страната на най-малкото квадратче. Тогава дължината на страната на най-големия квадрат в долния ляв ъгъл е $(2a-b)$ см **(1 т.)**. Дължината на страната на квадрата в горния десен ъгъл е $(a+b)$ см **(1 т.)**, а дължината на квадрата в долния десен ъгъл е $(a+2b)$ см **(1 т.)**. Оттук за дължината на страната на най-големия квадрат получаваме, че е равна и на $(a+2b)+b=(a+3b)$ см **(1 т.)**. Следователно $2a-b=a+3b$, откъдето $a=4b$ см **(1 т.)**. Сега $CD=2a+a+b=13b$, $AD=a+a+3b=11b$ и обиколката на правоъгълника е $48b$ **(1 т.)**. От условието намираме $13b=546$, т.е. $b=42$ см и следователно търсената обиколка е $48.42=2016$ см **(1 т.)**.

Задача 4.3. Във всяко квадратче на таблица 3×3 е записано числото 1. Казваме, че 3 квадратчета от таблицата образуват *тройка*, ако никои 2 от тях не са в един и същи ред или стълб. Извършва се следната операция: избира се *тройка* и към числата в квадратчетата от *тройката* се прибавя едно и също число.

1	**1**	**1**
1	**1**	**1**
1	**1**	**1**

а) Колко са различните *тройки*?

б) Проверете, че каквато и *тройка* да вземем, можем да намерим друга *тройка* така, че двете *тройки* да имат общо квадратче.

в) Възможно ли е след многократно прилагане на операцията числата във всички квадратчета на таблицата да се окажат различни?

Решение: а) Да номерираме квадратчетата на таблицата с числата от 1 до 9, както е показано. Избирането на *тройка* може да стане по 6 различни начина **(1 т.)**.

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**

Едно примерно доказателство е с изчерпване на възможностите. Например, квадратчето с № 1 може да бъде комбинирано с квадратчетата с номера 5 и 9 или с квадратчетата с номера 6 и 8. Разсъждавайки по същия начин за квадратчетата с номера 2 и 3, получаваме всички възможни *тройки*:

(1,5,9); (1,6,8); (2,4,9); (2,6,7); (3,4,8) и (3,5,7). **(1 т.)**

б) Когато тройките са изписани, например както в а), проверката се състои в отбелязване, че първите две *тройки* имат общо квадратче № 1, третата и четвъртата *тройка* имат общо квадратче № 2, а петата и шестата *тройка* имат общо квадратче № 3. **(1 т.)**

в) Да подредим *тройките* по произволен начин и да ги номерираме с I, II, III, IV, V и VI. Използването на римски числа не е задължително. Номерирането може да бъде направено например с думи или с арабски цифри, но трябва да се осъзнава разликата с номерацията на квадратчетата в таблицата. Едно възможно подреждане е да се използва реда в а) и съответното номериране е следното:

I = (1,5,9); II = (1,6,8); III = (2,4,9); IV = (2,6,7); V = (3,4,8) и VI = (3,5,7). **(1 т.)**

От б) следва, че операцията от условието на задачата трябва да се прилага към всяка тройка различен брой пъти **(1 т.)**. По-долу е описано едно примерно многократно прилагане на операцията, което води до искания резултат.

Към квадратчетата от I не прилагаме операцията и таблицата запазва първоначалния си вид, означен с А. Към квадратчетата от II прилагаме операцията 10 пъти, като всеки път прибавяме числото 1. Таблицата приема вида, означен с Б. Към квадратчетата от III прилагаме операцията 100 пъти, като всеки път прибавяме числото 1. Таблицата приема вида, означен с В. Към квадратчетата от IV прилагаме операцията 1000 пъти, като всеки път прибавяме числото 1. Таблицата приема вида, означен с Г. Към квадратчетата от V прилагаме операцията 10 000 пъти, като всеки път прибавяме числото 1. Таблицата приема вида, означен с Д. Накрая към квадратчетата от VI прилагаме операцията 100 000 пъти, като всеки път прибавяме числото 1. Таблицата приема вида, означен с Е. Сега е достатъчно да забележим, че и деветте числа са различни. **(2 т.)** Посоченото решение не е единствено.

1	**1**	**1**
1	**1**	**1**
1	**1**	**1**

А

11	**1**	**1**
1	**1**	**11**
1	**11**	**1**

Б

11	**101**	**1**
101	**1**	**11**
1	**11**	**101**

В

11	**1101**	**1**
101	**1**	**1011**
1001	**11**	**101**

Г

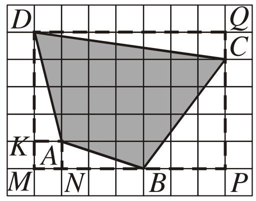
11	**1101**	**10 001**
10 101	**1**	**1011**
1001	**10 011**	**101**

Д

11	**1101**	**110 001**
10 101	**100 001**	**1011**
101 001	**10 011**	**101**

Е

Задача 5.1. Правоъгълникът на чертежа е съставен от еднакви квадратчета с дължина на страната цяло число сантиметри и има лице 252 кв.см. Да се намери лицето на четириъгълника $ABCD$.



Решение: Правоъгълникът от условието на задачата се състои от $9.7 = 63$ малки квадратчета и следователно лицето на едно квадратче е 252 : 63 = 4 кв.см. Тогава дължината на страната на едно квадратче е 2 см **(1 т.)**. За търсеното лице S имаме: $S = S_{MPQD} - \left(S_{MNAK} + S_{NBA} + S_{BPC} + S_{CQD} + S_{KAD}\right)$. **(2 т.)**

Последователно намираме: $S_{MPQD} = 7.5.4 = 140$ кв. см, $S_{MNAK} = 4$ кв. см, $S_{NBA} = 6$ кв. см, $S_{BPC} = 24$ кв. см, $S_{CQD} = 14$ кв. см и $S_{KAD} = 8$ кв. см. **(3 т.)** Следователно $S = 140 - (4 + 6 + 24 + 14 + 8) = 84$, $S = 84$ кв. см. **(1 т.)**

Задача 5.2. Госпожата по математика даде следната домашна работа:

"Всеки да измисли задача с дроби, в която да участва числото 2012."
Христо измисли следната задача: "Да се намери сумата на всички правилни, несъкратими, обикновени дроби със знаменател 2012." Задачата на брат му Петър беше: "Намерете сумата 0,0001 + 0,0002 + ... + 0,2012."

Решете съставените от братята задачи и намерете коя от търсените суми е по-голяма и с колко.

Решение: Първо ще пресметнем числото на Петър. Групираме числата по две в 2012 : 2 = 1006 групи по следния начин (първото с последното събираемо, второто с предпоследното събираемо и т. н.):

$$0{,}0001 + 0{,}0002 + 0{,}0003 + \ldots + 0{,}2011 + 0{,}2012 =$$

= (0,0001 + 0,2012) + (0,0002 + 0,2011) +... + (0,1006 + 0,1007) = 1006.0,2013 = 202,5078 **(2 т.)**. За да пресметнем числото на Христо, първо трябва да изброим колко дроби ще събираме. Понеже 2012 = 4.503, то всички дроби с числител четно число и знаменател 2012 ще са съкратими. Да обърнем внимание, че 503 е просто число. Съкратими ще са още и дробите с числител 503 и 3.503. **(1 т.)** Следователно дробите, които събираме, са с числители нечетни числа, по-малки от 2012 и различни от 503 и 3.503, т.е. възможните числители са 1, 3, ..., 501, 505, ..., 1507, 1511, ..., 2011, които са общо $2012 : 2 - 2 = 1004$ на брой **(1 т.)**. Отново можем да групираме по двойки:

$$\frac{1}{2012} + \frac{2011}{2012} = \frac{3}{2012} + \frac{2009}{2012} = \ldots\ldots = 1,$$ като липсва само $\frac{503}{2012} + \frac{1509}{2012}$ **(1 т.)**.

Следователно търсената сума е 1004 : 2 = 502, което е и числото на Христо **(1 т.)**. Разликата на двете суми е 502 – 202,5078 = 299,4922 **(1 т.)**.

Задача 5.3. В ребуса **КУЧЕ + ЗА + ЛОВ = 2012 + *n*** на различните букви в лявата страна съответстват различни цифри от 1 до 9 (без 0), а n е произволно естествено число.

а) Да се намери най-малкото естествено число n**,** за което ребусът има решение.

б) Ако $n = 2011$, намерете най-голямата възможна стойност на **КУЧЕ**, за която ребусът има решение.

Решение: а) Лявата страна има 9 различни букви, което означава, че всяка цифра от 1 до 9 се среща точно по веднъж. Следователно остатъкът при деление с 9 на лявата страна е равен на остатъка при делението на 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 с 9. Заключаваме, че лявата страна се дели на 9 **(1 т.)**. Така получаваме, че ако ребусът има решение, то n е поне 4 (2016 се дели на 9) **(1 т.)**. Остава да дадем пример при $n = 4$. Ето един: 1372 + 596 + 48 = 2012 + 4 **(2 т.)**.

б) Ясно е, че най-голямата възможна стойност на К е 3. За отхвърляне с проверки на случаите У = 9 и У = 8 по **(1 т.)**. За намиране на решението КУЧЕ = 3796 и показан пример 3796 + 42 + 185 = 4023 **(1 т.)**.

Задача 6.1. Пирамида има височина h м и основа – правоъгълен триъгълник с катети a м и b м. Пресметнете обема на пирамидата, ако:

$$a=7\frac{7}{24}+\frac{15}{7.(-2)^2}-0,1:0,024+\frac{5}{56}(-3)^3,\ b=\frac{35^5(-15)^2(-6)^7}{(-14)^5 15^8}\ \text{и}\ h=\frac{-3,206-1,344}{1,821-5,071}.$$

Решение: Имаме $a=\frac{175}{24}+\frac{15}{28}-\frac{100}{24}-\frac{135}{56}=\frac{75}{24}-\frac{105}{56}=\frac{25}{8}-\frac{15}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$ **(2 т.)**;

$b=\frac{35^5 6^7}{14^5 15^6}=\frac{5^5 7^5 2^7 3^7}{2^5 7^5 3^6 5^6}=\frac{12}{5}$ **(2 т.)**; $h=\frac{-4,55}{-3,25}=\frac{91}{65}=\frac{7}{5}$ **(2 т.)**;

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{12}{5}\cdot\frac{7}{5}=0,7\ \text{куб. м}$$ **(1 т.)**.

Задача 6.2. Георги трябвало да умножи 11^3 с трицифреното число T, чиято цифра на единиците е два пъти по-голяма от цифрата на десетиците, а цифрата на стотиците му е с 5 по-голяма от цифрата на десетиците. Но той сгрешил при умножението и разменил мястото на единиците и десетиците на T. Така получил резултат, с 11979 по-голям от верния. Намерете T.

Решение: Нека цифрата на десетиците на T е x, така че $T=100(x+5)+10x+2x$ **(1 т.)**, а объркaното число е $100(x+5)+20x+x$ **(1 т.)**. Тогава $11^3.(21x-12x)=11979$, откъдето $x=1$ **(4 т.)**. Следователно търсеното число е 612 **(1 т.)**.

Задача 6.3. В магазин има дини по 5 кг, пъпеши по 2 кг и сливи по 50 г. Плодовете общо са 200 и тежат 100 кг. По колко плода от всеки вид може да има?

Решение: Ако има d дини, p пъпеша и s сливи, то $d+p+s=200$ **(1 т.)**. Масата в грамове е $5000d+2000p+50s=100000$, което след деление на 50 води до $100d+40p+s=2000$ **(1 т.)**. Изваждайки първото уравнение, получаваме $99d+39p=1800$ и след деление на 3 имаме $33d+13p=600$ **(1 т.)**. Понеже сборът и първото събираемо се делят на 3, трябва $p=3q$ за някое цяло $q\geq 0$ **(1 т.)**. Заместваме и съкращаваме: $11d+13q=200$ **(1 т.)**. С непосредствена проверка откриваме решенията $(d;q)=(4;12)$ и $(17;1)$. Окончателно отговорите са $(d;p;s)=(4;36;160)$ **(1 т.)** и $(17;3;180)$ **(1 т.)**.

Задача 7.1. Да се намерят всички цели решения на уравнението $2xy+x-2y=2012$.

Решение: Представяме уравнението във вида:

$$2xy+x-2y=2012 \Leftrightarrow 2xy+x-2y-1=2011 \Leftrightarrow (x-1)(2y+1)=2011.$$ **(3 т.)**

Понеже 2011 е просто и търсим цели решения, имаме следните възможности:

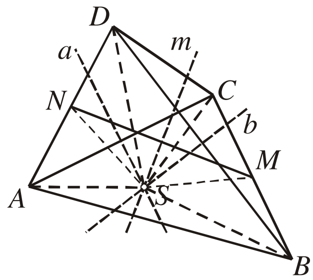
1) $x-1=2011,\ 2y+1=1 \Rightarrow x=2012,\ y=0;$ **(1 т.)**

2) $x-1=1,\ 2y+1=2011 \Rightarrow x=2,\ y=1005;$ **(1 т.)**

3) $x-1=-2011,\ 2y+1=-1 \Rightarrow x=-2010,\ y=-1;$ **(1 т.)**

4) $x-1=-1,\ 2y+1=-2011 \Rightarrow x=0,\ y=-1006.$ **(1 т.)**

Задача 7.2. В четириъгълника $ABCD$ страните BC и AD са равни, а точките M и N са техните среди. Да се докаже, че симетралите на AC, BD и MN се пресичат в една точка.



Решение: Нека a и b са симетралите на AC и BD и $a \cap b = S$. **(1 т.)** От $SA = SC$, $SB = SD$ и $BC = AD$ следва, че $\Delta ADS \cong \Delta CBS$ (III пр.) **(3 т.)**, откъдето $\sphericalangle DAS = \sphericalangle BCS$. Следователно $\Delta ANS \cong \Delta CMS$ (I пр.) **(2 т.)**. Оттук $SN = SM$, т.е. точката S е от симетралата m на MN. **(1 т.)**

Задача 7.3. В квадрат 3×3, съставен от 9 малки квадратчета, във всяко квадратче е записано всяко едно от числата от 1 до 9. За всеки от четирите подквадрата 2×2 е пресметнат сборът от записаните числа. Най-малкият от четирите сбора наричаме характеристика на квадрата. Да се намери най-голямата възможна характеристика на квадрата.

a_1	b_1	a_2
b_2	c	b_3
a_3	b_4	a_4

1	7	2
8	9	6
3	5	4

Решение: Нека x е характеристиката на квадрата. Да намерим сборовете на числата в четирите подквадрата и да ги съберем. В получения сбор числата a_i, които стоят в ъглите на квадрата, участват по 1 път, числата b_i, които стоят в средата на страните – по 2 пъти и числото c, което е в центъра на квадрата – 4 пъти. **(2 т.)** Понеже x е най малкият сбор имаме $4x \le (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + 2(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + 4c$. **(1 т.)** Тъй като търсим най-голямата възможна стойност на x, получаваме $4x \le (1+2+3+4) + 2(5+6+7+8) + 4.9 = 98$, т.е. $x \le \frac{98}{4} = 24\frac{1}{2}$. **(1 т.)** Но x е естествено число и следователно $x \le 24$. **(1 т.)** Вдясно е показан пример на квадрат с характеристика 24. **(2 т.)**

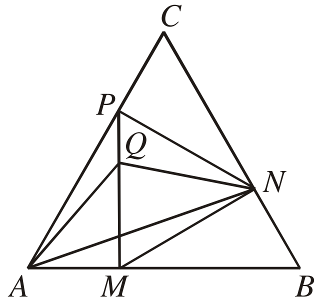
Задача 8.1. Сред учениците от 8 клас на едно училище провели анкета – кой обича да гледа футбол и кой – баскетбол. Оказало се, че 90% от любителите на футбола обичат и баскетбол, а 72% от любителите на баскетбола обичат и футбол. От запитаните 10% не обичат нито футбол, нито баскетбол. Колко процента от анкетираните обичат само един спорт? Какъв е възможно най-малкият брой анкетирани?

Решение: Нека $x\%$ обичат футбол и $y\%$ – баскетбол. Тогава от условието получаваме системата:

$$\left| \begin{array}{l} 0,9x = 0,72y \\ 10 + y + (1-0,9)x = 100 \end{array} \right. \textbf{(2 т.)}.$$

Имаме $\left| \begin{array}{l} 0,9x = 0,72y \\ 10 + y + (1-0,9)x = 100 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{9}{10}x = \frac{72}{100}y \\ 10 + y + 0,1x = 90 \end{array} \right.$, откъдето намираме $x = \frac{200}{3}\%$ и $y = \frac{250}{3}\%$ **(2 т.)**. Процентът на тези, които обичат само един спорт, е $0,1x + 0,28y = 30\%$ **(1 т.)**. Броят на анкетираните трябва да се дели на 10 и 30 **(1 т.)**. Най-малкият възможен брой анкетирани е 30. Наистина, ако са анкетирани 30 ученици, то любителите на футбола са $\frac{30.200}{3.100} = 20$, любителите на баскетбола са $\frac{30.250}{3.100} = 25$, а 18 обичат и двата спорта **(1 т.)**.

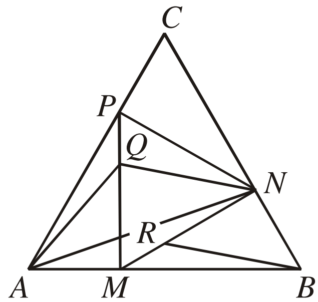
Задача 8.2. Върху страните AB, BC и AC на равностранния триъгълник ABC са взети съответно точки M, N и P такива, че $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}=\frac{1}{2}$. Върху отсечката PM е взета точка Q такава, че $\frac{PQ}{QM}=\frac{1}{2}$. Да се намерят ъглите на триъгълник AQN.



Решение 1: Означаваме $\overrightarrow{AM}=x$. Разглеждаме ротация $\rho(A,+60^0)$ **(1 т.)**. Нека $\rho(x)=x_1$ и следователно $\overrightarrow{AB}=3x$, $\overrightarrow{AP}=2x_1$ и $\overrightarrow{AC}=3x_1$. Пресмятаме $\overrightarrow{AQ}=\frac{\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AP}}{3}=\frac{x+4x_1}{3}$ и $\overrightarrow{AN}=\frac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}=\frac{6x+3x_1}{3}$. Следователно

$$\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AQ}=\frac{5x-x_1}{3}.$$

Тогава $\rho(\overrightarrow{QN})=\frac{5\rho(x)-\rho(x_1)}{3}=\frac{5x_1-(x_1-x)}{3}=\frac{4x_1+x}{3}=\overrightarrow{AQ}$ **(3 т.)**. Получаваме, че триъгълник AQN е равнобедрен с ъгли 120^0, 30^0 и 30^0 **(3 т.)**.

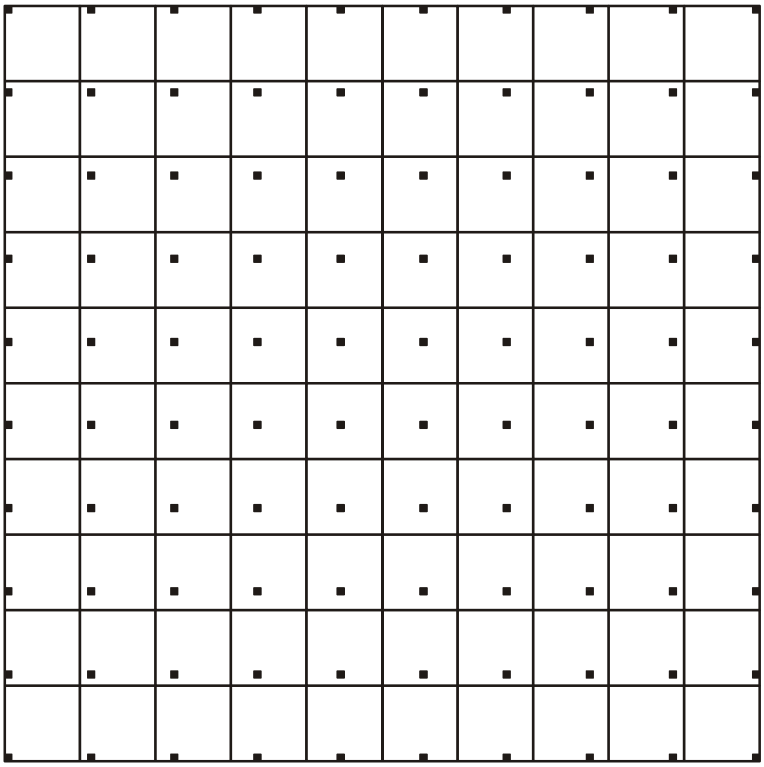


Решение 2: Върху отсечката MN избираме точка R такава, че $\frac{MR}{RN}=\frac{1}{2}$. Нека $PM_1\perp AB$ ($M_1\in AB$). От $\sphericalangle APM_1=30^0$ следва, че $AM_1=\frac{1}{2}AP=AM$ и следователно $M_1\equiv M$. Аналогично $MN\perp BC$ и $NP\perp AC$. Получаваме, че $\Delta AMP\cong\Delta BNM\cong\Delta CPN$ **(1 т.)**, откъдето $PM=MN=NP$ и $\sphericalangle AQM=\sphericalangle BRN$. Следователно $\Delta AMQ\cong\Delta BNR$, т.е. $AQ=BR$. Пресмятаме, че $\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MR}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{NB}$ и заключаваме, че $RBNQ$ е успоредник, откъдето $QN=BR=AQ$ **(2 т.)**. От друга страна $\sphericalangle NQR=\sphericalangle NBR=90^0-\sphericalangle BRN$. Оттук $\sphericalangle AQM+\sphericalangle NQR=\sphericalangle BRN+90^0-\sphericalangle BRN=90^0$ **(1 т.)**. Нека $QR_1\perp MN$ ($R_1\in MN$). От $\sphericalangle MQR_1=30^0$ следва, че $MR_1=\frac{1}{2}MQ=\frac{1}{2}RN=MR$ и значи $R_1\equiv R$. Следователно $\sphericalangle AQN=120^0$ **(2 т.)**, а другите два ъгъла са по 30^0 **(1 т.)**.

Задача 8.3. Нека $ABCD$ е квадрат с дължина на страната 10. Да се намери максималният брой точки, които могат да бъдат разположени във вътрешността на квадрата, така че всеки квадрат с дължина на страната 1 и страни, успоредни на страните на $ABCD$, да съдържа (включително по контура си) най-много 4 точки.

Решение: Да разгледаме координатна система с начало точката A и такава, че точката B има координати $(10,0)$, точката C има координати $(10,10)$, а точката D има координати $(0,10)$. Да разгледаме квадратите с върхове в точките с координати (i,j), $(i+1,j)$, $(i+1,j+1)$ и $(i,j+1)$ за цели $0\le i,j\le 9$. Тези квадрати са с дължина на страната, равна на 1 и страните им са успоредни на страните на квадрата $ABCD$. Следователно всеки един от тях може да съдържа най-много 4 от точките. Тъй като квадратите са общо 100 и покриват напълно $ABCD$, в $ABCD$ не могат да бъдат разположени повече от 400 точки, удовлетворяващи условието на задачата **(3 т.)**.

Ще докажем, че в $ABCD$ могат да бъдат разположени 400 точки, удовлетворяващи условието на задачата. Да забележим, че един квадрат с дължина на страната 1 и страни, успоредни на страните на $ABCD$, съдържа две точки E и F с координати съответно (x_E, y_E) и (x_F, y_F) тогава и само тогава, когато $|x_E - x_F| \leq 1$ и $|y_E - y_F| \leq 1$. Да разгледаме квадратчетата с върхове в точките с координати, $\left(i+\frac{i}{10}, j+\frac{j}{10}\right)$, $\left(i+\frac{i+1}{10}, j+\frac{j}{10}\right)$, $\left(i+\frac{i+1}{10}, j+\frac{j+1}{10}\right)$ и $\left(i+\frac{i}{10}, j+\frac{j+1}{10}\right)$ за цели $0 \leq i, j \leq 9$. Тези квадратчета са общо 100 на брой и имат дължина на страната $\frac{1}{10}$. Нека изберем по 4 точки от вътрешността на всяко едно от тях. Така сме избрали общо 400 точки от вътрешността на $ABCD$ **(2 т.)**.



Да допуснем, че квадрат с дължина на страната 1 и страни, успоредни на $ABCD$, съдържа повече от 4 точки. Тогава той съдържа точка E с координати (x_E, y_E) от квадратче с върхове $\left(i+\frac{i}{10}, j+\frac{j}{10}\right)$, $\left(i+\frac{i+1}{10}, j+\frac{j}{10}\right)$, $\left(i+\frac{i+1}{10}, j+\frac{j+1}{10}\right)$ и $\left(i+\frac{i}{10}, j+\frac{j+1}{10}\right)$, и точка F с координати (x_F, y_F) от квадратче с върхове $\left(k+\frac{k}{10}, s+\frac{s}{10}\right)$ $\left(k+\frac{k+1}{10}, s+\frac{s}{10}\right)$, $\left(k+\frac{k+1}{10}, s+\frac{s+1}{10}\right)$ и $\left(k+\frac{k}{10}, s+\frac{s+1}{10}\right)$, като i, j, k и s са цели числа и $(i, j) \neq (k, s)$. Следователно в сила са следните неравенства: $i+\frac{i}{10} < x_E < i+\frac{i+1}{10}$, $j+\frac{j}{10} < y_E < j+\frac{j+1}{10}$, $k+\frac{k}{10} < x_F < k+\frac{k+1}{10}$, $s+\frac{s}{10} < y_F < s+\frac{s+1}{10}$, $|x_E - x_F| \leq 1$ и $|y_E - y_F| \leq 1$. От първите 4 неравенства получаваме

$$i-k+\frac{i-k-1}{10} < x_E - x_F < i-k+\frac{i-k+1}{10}$$
$$j-s+\frac{j-s-1}{10} < y_E - y_F < j-s+\frac{j-s+1}{10}.$$

Оттук и от неравенствата $|x_E - x_F| \leq 1$ и $|y_E - y_F| \leq 1$, получаваме $|11(i-k)| < 11$ и $|11(j-s)| < 11$, откъдето $i = k$ и $j = s$, което противоречи на $(i, j) \neq (k, s)$. Следователно 400-те избрани точки удовлетворяват условието на задачата **(2 т.)**.

Задачите са предложени, както следва:

зад. 4.1 – Живко Желев, зад. 4.2 – Иван Ангелов, зад. 4.3 – Светлозар Дойчев, Веселин Ненков и Сава Гроздев;
зад. 5.1 – Теодоси Витанов, зад.5.2 – Ирина Шаркова, зад.5.3 – Иван Ангелов;
зад. 6.1 – Ивайло Кортезов, зад. 6.2 – Ивайло Старибратов, зад. 6.3 – Ивайло Кортезов;
Зад. 7.1, 7.2 и 7.3 – Теодоси Витанов
зад. 8.1 – Теодоси Витанов, зад. 8.2 – Симеон Замковой, зад. 8.3 – Христо Ганчев.

Министерство на образованието, младежта и науката

61. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 8-9 април 2012 г.
Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 9.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}=x$$

има целочислено решение.

Решение. Ако допуснем, че x е целочислено решение на уравнението, то $x \geqq |a|$ и след повдигане на квадрат достигаме до еквивалентното уравнение

$$2\sqrt{x^2-a^2}=x^2-2x.$$

Следователно $x \in [2,\infty)\cup\{0\}$ и след повторно повдигане на квадрат достигаме до

$$4x^3-x^4=4a^2.$$

Но $4a^2 \geqq 0$, т.е $x \in [2,4]\cup\{0\}$ и понеже x е цяло число, то $x=0,2,3$ или 4. Така окончателно получаваме $a=0,\pm 2$ или $\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

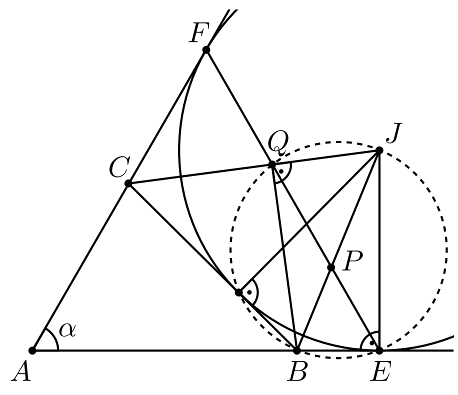
Оценяване. 1 т. за $x \geqq |a|$ и достигане до уравнението $2\sqrt{x^2-a^2}=x^2-2x$; 2 т. за $x \in [2,\infty)\cup\{0\}$ и достигане до уравнението $4x^3-x^4=4a^2$; 2 т. за $x \in [2,4]\cup\{0\}$; 2 т. за намиране на стойностите на параметъра a.

Задача 9.2. Даден е $\triangle ABC$. Външновписаната окръжност към страната BC има център J и се допира до правите AB и AC съответно в точки E и F. Ако BJ и CJ пресичат EF съответно в точки P и Q, и $BC=2PQ$, да се намери $\angle BAC$.

Решение. Нека $\angle BAC=\alpha$. Тогава

$$\angle BJC=90^\circ-\frac{\alpha}{2}=\angle BEF$$

и следователно четириъгълникът $BEJQ$ е вписан в окръжност. Тъй като $\angle BEJ=90^\circ$, то тази окръжност е с диаметър BJ. В същото време $\angle JQP=\angle EBP=\angle CBP$ и следователно четириъгълникът $CBPQ$ е вписан в окръжност (с диаметър BC). Тогава



$$\triangle JQP \sim \triangle JBC \Rightarrow \frac{JQ}{JB}=\frac{PQ}{BC}=\frac{1}{2},$$

т.е. $\angle JBQ = 30^\circ$, но $\angle JQB = 90^\circ$ и следователно

$$\angle BAC = \alpha = 180^\circ - 2\angle BJC = 2\angle JBQ = 60^\circ.$$

Оценяване. 2 т. за доказване, че $BEJQ$ е вписан четириъгълник; 2 т. за доказване, че $CBPQ$ е вписан четириъгълник; 1 т. за доказване, че $\triangle JQP \sim \triangle JBC$; 2 т. за намиране на $\angle BAC = 60^\circ$.

Задача 9.3. Нека a е естествено число, а p е просто число. Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа n, за които числото $a^{p^n} + p^n$ има поне два различни прости делителя.

Решение. Ако $p|a$, имаме $a^{p^n} + p^n = p^n(pA + 1)$ и твърдението е очевидно. Оттук нататък ще считаме, че $(a, p) = 1$.

Нека p е нечетно, $n = pk$ и $a^{p^{n-1}} = x$, $p^k = y$ за краткост. Тогава

$$a^{p^n} + p^n = x^p + y^p = (x + y)(x^{p-1} - x^{p-2}y + \cdots - xy^{p-2} + y^{p-1})$$

и да допуснем, че това число има не повече от един прост делител, т.е. е равно на q^t за някое просто q и някое естествено t. Очевидно $q \neq p$. От $q|x + y$ следва, че $x \equiv -y \pmod q$ и тогава

$$x^{p-1} - x^{p-2}y + \cdots - xy^{p-2} + y^{p-1} \equiv py^{p-1} \pmod q$$

не се дели на q, противоречие.

Нека $p = 2$ и $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, $a^{2^{n-2}} = u$, $2^k = v$ за краткост. Тогава

$$a^{2^n} + 2^n = u^4 + 4v^4 = (u^2 + 2uv + 2v^2)(u^2 - 2uv + 2v^2),$$

като лесно се доказва, че двата множителя отдясно са взаимно прости и по-големи от 1 и значи имат различни прости делители.

Оценяване. 1 т. за отбелязване, че при $p|a$ работа върши всяко n, по 3 т. за всеки от случаите $p = 2$ и p нечетно.

Задача 9.4. Дадени са полиномите $f(x) = x^3 + ax + b$ и $g(x) = x^3 + a^2x^2 + b^2$, където a и b са реални параметри. Да се намерят всички стойности на a и b, за които точно едно от числата -2, -1 и 1 е общ корен за $f(x)$ и $g(x)$.

Решение. Тъй като $g(1) = 1 + a^2 + b^2 > 0$, общият корен не може да бъде 1. Да допуснем, че -2 е общ корен на $f(x)$ и $g(x)$. Тогава $f(-2) = -8 - 2a + b = 0$ и $g(-2) = -8 + 4a^2 + b^2 = 0$, откъдето последователно получаваме $b = 2(a+4)$, $4a^2+4(a+4)^2 = 8 \iff a^2+4a+7 = 0$. Тъй като последното уравнение няма реални решения, и -2 не може да бъде общ корен на $f(x)$ и $g(x)$.

Ако -1 е общият корен, имаме $f(-1) = -1 - a + b = 0$ и $g(-1) = -1 + a^2 + b^2 = 0$, откъдето $b = a + 1$, $a^2 + (a + 1)^2 = 1 \iff 2a^2 + 2a = 0$, т.е. $a = 0$ или $a = -1$, като съответно $b = 1$ или $b = 0$.

Оценяване. 1 т. за отхвърляне на 1; по 3 т. за останалите два случая.

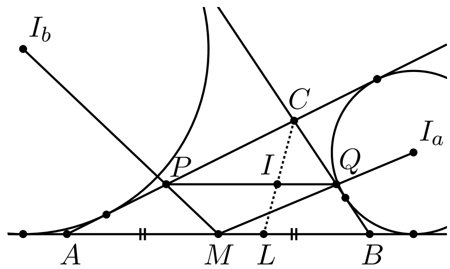
Задача 9.5. Даден е $\triangle ABC$ с центрове I_a и I_b на външновписаните окръжности към страните BC и AC съответно. Ако M е среда на страната AB и правите MI_a и MI_b пресичат страните BC и AC съответно в точки Q и P, да се докаже, че правата PQ е успоредна на AB и минава през центъра I на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Решение. Ако използваме стандартните означения за $\triangle ABC$, то

$$\frac{CP}{PA} = \frac{S_{CMI_b}}{S_{AMI_b}} = \frac{\frac{1}{2}S_{CBI_b} + \frac{1}{2}S_{CAI_b}}{\frac{1}{2}S_{ABI_b}} = \frac{r_b a + r_b b}{r_b c} = \frac{a+b}{c}.$$

Аналогично $\dfrac{CQ}{QB} = \dfrac{a+b}{c}$, т.е. $\dfrac{CP}{PA} = \dfrac{CQ}{QB}$ и следователно $PQ \parallel AB$. От друга страна, ако $CI^{\to}$ пресича страната AB в точка L, то

$$\frac{CI}{IL} = \frac{CB}{BL} = \frac{a}{\dfrac{ac}{a+b}} = \frac{a+b}{c}$$



и следователно $I \in PQ$.

Забележка. От теоремата на Пап, приложена за тройките точки A, M, B и I_b, C, I_a, лесно следва, че $I \in PQ$ независимо от избора на точката M върху страната AB. Да отбележим, че само когато M е среда на AB имаме, че $PQ \parallel AB$.

Оценяване. 4 т. за доказване, че $PQ \parallel AB$; 3 т. за доказване, че $I \in PQ$. (В случай, че се използва теоремата на Пап, да не се изисква доказателство.)

Задача 9.6. Дадена е компания от n души, n нечетно, в която има поне двама, които не се познават, и в която всички имат един и същ брой познати. Колко най-малко хора трябва да си тръгнат, за да остане група, в която всеки двама се познават?

Решение. На езика на графите тази задача се формулира така: Даден е регулярен непълен граф G с n върха и степен d, където n е нечетно число. Каква е максималната мощност на клика в G?

Да допуснем, че в G съществува клика C с мощност $(n+1)/2$. Допълнителният граф $\overline{G}$ е също регулярен, като C е антиклика. Ако от всеки връх на $\overline{G}$ излизат $\overline{d} = n-1-d$ ребра, то общият брой на ребрата, излизащи от C е $(n+1)\overline{d}/2$. Този брой трябва да е равен на броя на ребрата, влизащи във $G - C$. Това е невъзможно, тъй като сумата от степените на върховете в $G - C$ е $\overline{d}(n-1)/2$. Следователно мощността на максимална клика не надхвърля $(n-1)/2$.

Да конструираме пример на регулярен граф с клика с мощност $(n-1)/2$. Нека $n = 4k+1$. Да означим върховете с $\{x_1, \dots, x_{2k}, y_1, \dots, y_{2k}, z\}$. Върху върховете $x_1, \dots, x_{2k}$ от една страна и върху $y_1, \dots, y_{2k}$ от друга, са построени $2k$-клики. Добавени са и ребрата $zy_1, \dots, zy_k, zx_1, \dots, zx_k$, както и $x_{k+1}y_{k+1}, \dots, x_{2k}y_{2k}$.

Нека $n = 4k+3$. G се получава като обединение на $2k+1$-клика и $2k+2$-клика, от която е изтрит 1-фактор (множество от ребра, съдържащо всеки връх точно веднъж).

Оценяване. 1 т. за намиране на отговора; 3 т. за доказване на горната граница; 3 т. за намиране на конструкции.

Задача 10.1 Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\sqrt[3]{1+3^x} + \sqrt[3]{1-3^x} = a$$

има решение.

Решение. Даденото уравнение има смисъл за всяко x. Да положим $u = \sqrt[3]{1+3^x}$ и $v = \sqrt[3]{1-3^x}$, като u и v са реални числа и $u > 1 > v$. Имаме $u + v = a$ и

$$2 = u^3 + v^3 = (u+v)((u+v)^2 - 3uv) = a(a^2 - 3uv),$$

откъдето $a \neq 0$ и тогава $uv = \dfrac{a^3-2}{3a}$. Следователно u и v са корените на уравнението $f(t) = t^2 - at + \dfrac{a^3-2}{3a} = 0$. Необходимо и достатъчно условие u и v да са реални числа и $u > 1 > v$ е $f(1) < 0$, т.е.

$$1 - a + \frac{a^3-2}{3a} < 0 \Leftrightarrow a(a-2)(a^2-a+1) < 0.$$

Следователно търсените стойности на параметъра са $a \in (0,2)$. (Друго възможно решение е да не се отбележи, че $u > 1 > v$, а само $u > v$, $D > 0$, откъдето отново достигаме до $a \in (0,2)$.)

Оценяване. 1 т. за полагането $u = \sqrt[3]{1+3^x}$, $v = \sqrt[3]{1-3^x}$ и отбелязване, че $u > 1 > v$; 3 т. за получаване на квадратно уравнение с корени u и v (или съответни изрази на x), 3 т. за обосновано намиране на стойностите на параметъра a.

Задача 10.2. Виж Задача 9.2.

Задача 10.3. Виж задача 9.3.

Задача 10.4. Виж задача 9.4.

Задача 10.5. Виж задача 9.5.

Задача 10.6. Виж задача 9.6.

Задача 11.1. Да се намерят всички цели стойности на параметъра a, за които уравнението

$$\sin x + a \sin 2x + \sin 5x = 2a$$

има решение.

Решение. Имаме

$$(1)\qquad 2|a| = |\sin x + a\sin 2x + \sin 5x| \le |\sin x| + |a||\sin 2x| + |\sin 5x| \le 2 + |a|,$$

откъдето $|a| \le 2$.

Директно проверяваме, че $x = 0$ е решение при $a = 0$ и $x = \pm 90^\circ$ е решение при $a = \pm 1$.

При $a = 2$ уравнението става $\sin x + 2\sin 2x + \sin 5x = 4$ и (1) показва, че $\sin x = \sin 2x = 1$. Това е невъзможно, защото при $\sin x = 1$ имаме $\cos x = 0$ и $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 0$.

При $a = -2$ уравнението става $\sin x - 2\sin 2x + \sin 5x = -4$ и (1) показва, че $\sin x = -1$, $\sin 2x = 1$. Това е невъзможно, защото при $\sin x = -1$ имаме $\cos x = 0$ и $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 0$.

Оценяване. 2 т. за намиране на решение при $a = 0$ и $a = \pm 1$; 2 т. за отхвърляне на случая $|a| > 2$; 3 т. за случая $a = \pm 2$.

Задача 11.2. В остроъгълен $\triangle ABC$ с ортоцентър H и среда M на страната AB, ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ пресича HM в точка T. Да се докаже, че:

а) $\dfrac{HT}{TM} = \dfrac{2\cos\gamma}{1-\cos\gamma}$, където $\gamma = \sphericalangle ACB$.

б) H лежи на отсечката с краища петите на перпендикулярите от T към AC и BC.

Решение. а) Нека точка K е средата на дъгата AB, не съдържаща точка C. Тогава $KM \perp AB$ и $\triangle CHT \sim \triangle KMT$. Следователно

$$\frac{HT}{TM} = \frac{CH}{KM} = \frac{2R\cos\gamma}{R - R\cos\gamma} = \frac{2\cos\gamma}{1-\cos\gamma}.$$

б) Нека A_1, P и Q са петите на перпендикулярите съответно от A, T и M към BC. Тогава $\dfrac{PQ}{PA_1} = \dfrac{TM}{TH}$. Понеже Q е среда на BA_1, от а) следва, че $PA_1 = \dfrac{BA_1\cos\gamma}{1+\cos\gamma}$. Тъй като $HA_1 = BA_1 \mathrm{cotg}\gamma$, от $\triangle PHA_1$ намираме $\mathrm{cotg} \sphericalangle HPA_1 = \mathrm{tg}\dfrac{\gamma}{2}$ и следователно $\sphericalangle HPC = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$.

Аналогично, ако R е петата на перпендикуляра от T към AC, то $\sphericalangle HRC = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$. Тогава от четириъгълника $RHPC$ получаваме $\sphericalangle PHR = 180^\circ$.

Оценяване. 2 т. за а); 5 т. за б).

Задача 11.3. Разглеждаме ъгли, съставени от едно ъглово квадратче, 2012 хоризонтални съседни и 2012 вертикални съседни квадратчета.

Колко най-много ъгли могат да се разположат върху безкрайна клетъчна дъска така, че всеки два ъгъла да имат поне едно общо квадратче?

Решение. Търсеният максимум е 16092. Да разгледаме ъглите, сочещи нагоре и надясно. Ще докажем, че има най-много 4023 такива ъгъла, всеки два от които имат поне едно общо квадратче. Да въведем стандартни координати на единичните квадратчета в равнината и да разгледаме върховете на всички ъгли. Ако за координатите (a, b) и (c, d) на върховете на два ъгъла е изпълнено $a < c$ и $b < d$ (или съответно $a > c$ и $b > d$), то двата ъгъла не се пресичат.

Нека най-горният и най-ляв връх е с координати (i, j) и съответно най-долният и най-десен връх е (p, q). За да се пресичат съответните ъгли е необходимо $p - i \leq 2011$ и $j - q \leq 2011$.

Да забележим, че всеки друг връх е с координати (a, b), където $i \leq a \leq p$ и $j \leq b \leq q$. От всички такива върхове да изберем връх с най-голяма втора координата. Да забележим, че ако преместим този връх едно квадратче наляво, условието за пресичане на ъглите е изпълнено. Това означава, че можем да приемем, че всички върхове с най-голяма втора координата са разположени един до друг, започвайки от квадратчето (i, b). Аналогично, можем да считаме, че всички върхове с най-голяма първа координата са разположени един до друг, започвайки от квадратчето с координати (c, q).

Сега разглеждаме върховете, ограничени от квадратчетата с координати (i, b) за най-голямото b и (c, q) за най-голямото c. Повтаряме горната процедура и т.н. Ще получим, че всички върхове се съдържат в начупена линия, започваща от квадратчето (i, j) и завършваща в квадратчето (p, q), която се движи само надясно и надолу. Понеже такава начупена линия съдържа 4021 върха, получаваме, че можем да разположим най-много 4023 ъгли.

Аналогично за всяко от другите три разположения на ъглите имаме най-много 4023 ъгли, изпълняващи условието на задачата.

Следователно има най-много $4.4023 = 16092$ ъгли. Ако изберем едно квадратче и разгледаме всички ъгли, които го съдържат, ще получим точно 16092 ъгли с исканото свойство.

Оценяване. 1 т. за верен отговор; 1 т. за разглеждане на ъгли от определен вид; 5 т. за доказване, че има най-много 4023 ъгъла от определен вид.

Задача 11.4. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\lg(\lg(x^3 + ax + 1)) = \lg(\lg(2x^3 + a))$$

има точно едно решение.

Решение. Уравнението е еквивалентно на

$$x^3 + ax + 1 = 2x^3 + a > 1.$$

Тогава

$$0 = x^3 - ax + a - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1 - a).$$

Значи $x = 1$ е решение на даденото уравнение, когато $2 + a > 1$, т.е. $a > -1$.

Уравнението $x^2 + x + 1 - a = 0$ има реални корени при $1 - 4(1 - a) \geq 0$, т.е. $a \geq 3/4$.

Ако някой от тези корени е 1, то $a = 3$. Тогава другият корен е -2 и той не е решение на началното уравнение, защото $2(-2)^3 + 3 \leq 1$.

Ако и двата корена са различни от 1, за тях трябва

$$2x^3 \leq 1 - a = -x^2 - x, \quad \text{т.е.} \quad x(2x^2 + x + 1) \leq 0.$$

Понеже $2x^2 + x + 1 > 0$, тези корени трябва да неположителни. Тъй като тяхата сума е -1, а произведението им е $1 - a$, това означава, че $a \leq 1$.

И така, $a \in (-1, 1] \cup \{3\}$.

Оценяване. 1 т. за получаване на $0 = (x-1)(x^2+x+1-a)$; 1 т. за намиране на $x = 1$ при $a > -1$; 1 т. за това, че $a = 3$ е измежду търсените стойности; 4 т. за довършване на решението (от които 2 т. за неположителността на съответните корени).

Задача 11.5. Да се намерят всички прости числа p и q, за които pq дели $12^{p+q} - 1$ и $p = q + 2$.

Решение. От малката теорема на Ферма получаваме, че $p|12^{q+1} - 1$ и $q|12^{p+1} - 1$.

От $q|12^{p+1}-1$ следва, че показателят k на 12 по модул q дели $p+1$ и тъй като k дели и $q-1 = p-3$, то k е делител на 4. Следователно $k = 1, 2, 4$.

При $k = 1$ намираме $q = 11$ и $p = 13$.

При $k = 2$ намираме $q = 13$, което не дава решение, понеже 15 не е просто число.

При $k = 4$ намираме $q = 5$ и $p = 7$, $q = 29$ и $p = 31$.

Оценяване. 1 т. за използване на малката теорема на Ферма; 2 т. за разглеждане на показателя k на 12 по модул q; 2 т. за намиране $k = 1, 2, 4$; 2 т. за намиране на решенията.

Задача 11.6. Нека a е реално число и $P(x)$ е неконстантен полином с реални коефициенти така, че $P(x^2 + a) = (P(x))^2$ за всяко реално число x. Да се докаже, че $a = 0$.

Решение. (*Н. Николов и Ал. Иванов*) От $P^2(x) = P^2(-x)$ следва, че P е или четна, или нечетна функция.

Ако P е четна функция, то $P(x) = Q(x^2)$. Тогава $Q((x^2 + a)^2) = Q^2(x^2)$ и следователно $Q((x + a)^2) = Q^2(x)$ за всяко x. Оттук $Q(x^2) = Q^2(x-a)$, т.е. полиномът $Q(x-a)$ също изпълнява даденото условие, като deg P = 2deg Q.

Продължавайки по същия начин, ще стигнем до полином от нечетна степен, изпълняващ даденото условие. Той не може да е четна функция.

И така, остана да разгледаме случая, когато P е нечетна функция. Тогава $P(x) = xR(x^2)$ и следователно $(x^2 + a)R((x^2 + a)^2) = x^2R^2(x^2)$. Оттук $(x + a)R((x + a)^2) = xR^2(x)$, т.е. $P(x) = (x - a)R^2(x-a)$ за всяко x. Нека $R(x-a) = x^kS(x)$, където $S(0) \neq 0$. Лесно се вижда, че $(x-a)R^2(x-a) = x^{2k+1}T(x) - aS^2(0)x^{2k}$. Понеже P е нечетна функция, следва, че $a = 0$.

Забележки. а) Лесно се доказва, че ако $P(x^2) = P^2(x) \neq \text{const}$ за всяко x, то $P(x) = x^n$.

б) Задачата е много частен случай на теорема на Дж. Ф. Рит, която описва комутиращите (относно композиция) полиноми.

Оценяване. 1 т. за това, че P е или четна, или нечетна функция; 3 т. за свеждане до нечетна фукция; 3 т. за случая на нечетна функция.

Задача 12.1. Вж. задача 11.1.

Задача 12.2. Вж. задача 11.2.

Задача 12.3. Естествените числа са оцветени в два цвята.

а) Да се докаже, че съществуват безбройно много двойки от различни едноцветни числа x и y, за които $x + y$ е точен квадрат.

б) Вярно ли е, че винаги съществуват две различни едноцветни числа x и y, чиито сбор е степен на двойката?

Решение. а) За всяко естествено число $x > 1$ е изпълнено равенството $(2x+1)^2 - (2x^2-2) + (2x+2)^2 - (2x^2-2) = (2x+3)^2$. Ако $(2x+1)^2 - (2x^2-2)$ или $(2x+2)^2 - (2x^2-2)$ е в цвета на $2x^2-2$, то имаме необходимото представяне. В противен случай $(2x+1)^2 - (2x^2-2)$ и $(2x+2)^2 - (2x^2-2)$ са в един и същи цвят и отново имаме нужното представяне.

б) Не! Да оцветим всички числа от вида $2^m(4t+3)$ в цвят A, а всички числа от вида $2^n(4k+1)$ в цвят B. Да допуснем, че сборът на две различни числа с цвят B е степен на двойката. Тогава $2^{n_1}(4k_1+3) + 2^{n_2}(4k_2+3) = 2^l$. Ако $n_1 \neq n_2$, получаваме противоречие по модул 2, а ако $n_1 = n_2$, имаме, че $4(k_1+k_2+1)+2$ е степен на двойката, което е невъзможно. Случаят, когато сборът на две различни числа с цвят A е степен на двойката, се разглежда аналогично.

Оценяване. 3 т. за а) (най-много 1 т. за частни случаи); 4 т. за б) (1 т. за верен отговор).

Задача 12.4. Вж. задача 11.4.

Задача 12.5. а) Да се намери броят на реалните корени на уравнението $x = \cos x$.

б) Нека $a_1, a_2, \ldots$ е редица от реални числа, за които $a_{n+1} = \cos a_n$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че редицата е сходяща.

Решение. а) За $f(x) = x - \cos x$ имаме, че $f'(x) = 1 + \sin x > 0$ при $x \neq -\pi/2 + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ и значи f е строго растяща функция. Понеже $f(0) < 0 < f(1)$, следва, че f има точно една нула.

б) Нека x_0 е нулата на f. Тъй като $x_0 \in (0,1)$ и $a_n \in [-1;1]$ при $n \geq 2$, то

$$|a_{n+1} - x_0| = |\cos a_n - \cos x_0| = 2|\sin \frac{x_0 + a_n}{2} \sin \frac{x_0 - a_n}{2}| \leq k|a_n - x_0|,$$

където $k = \sin 1 \in (0,1)$. Следователно $|a_n - x_0| \leq k^{n-2}|a_2 - x_0|$ при $n \geq 2$ и значи $a_n \to x_0$.

Оценяване. 1 т. за а); 6 т. за б), от които 2 т. за представяне на $a_{n+1} - x_0$ като удвоено произведение на синуси.

Задача 12.6. Вж. задача 11.6.

Задачите са предложени от: Стоян Боев – 9.1, 9.2 (10.2), 9.5 (10.5); Петър Бойваленков – 9.3 (10.3), 9.4 (10.4); Керопе Чакърян – 10.1; Иван Ланджев – 9.6 (10.6); Александър Иванов и Емил Колев – 11.1 (12.1), 11.2 (12.2), 11.3, 11.5, 12.3; Николай Николов – 11.4 (12.4), 11.6 (12.6), 12.5.