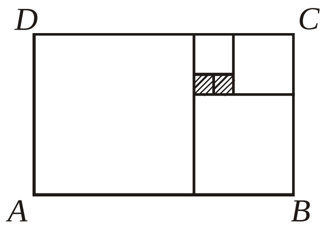
РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 25 февруари 2013 г.

ТЕМА ЗА 4 КЛАС

Задача 1. Утроените години на Живко, събрани с тези на по-малката му сестра Габриела, дават 20. На колко години е всеки от тях?

Задача 2. Правоъгълникът *ABCD* е разделен на 6 квадрата, както е показано. Да се намери обиколката на *ABCD*, ако обиколката на правоъгълника, образуван от двата защриховани най-малки квадрата, е 54 см.



Задача 3. Един ден учителят по математика г-н Иванов влязъл в час с една много дебела книга. Учениците се поинтересували каква е тази книга и той им обяснил, че е математическа енциклопедия. Те били очаровани и го попитали колко страници има книгата. Г-н Иванов отговорил, че могат сами да се опитат да пресметнат и добавил, че за номерирането на всички страници са били използвани общо 6945 цифри. Намерете колко страници има енциклопедията, ако е известно, че номерирането започва с 1.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.

Пожелаваме Ви успех!

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А   И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 25 февруари 2013 г.

Т Е М А   З А   5   К Л А С

Задача 1. Числото $A = 2013,397313...$ има 33 цифри. При това всяка цифра след десетичната запетая е цифрата на единиците на произведението от предхождащите я две цифри.

а) Коя е цифрата на 29-а позиция след десетичната запетая?

б) Колко пъти цифрата 3 участва в записа на *A*?

Задача 2. Аквариум има форма на правоъгълен паралелепипед, височината на който е по-малка от дължината. Ако вътрешността на аквариума е запълнена плътно с еднакви кубчета с ръб 1 дм, 6 кубчета от тях няма да се допират нито до стена, нито до дъното на аквариума.

а) Какви могат да са размерите на такъв аквариум?

б) Най-много колко рибки могат да живеят в такъв аквариум, ако водата в него може да достига не повече на $\frac{9}{10}$ от височината му, а една рибка се нуждае от поне 3 литра вода?

Задача 3. В квадратна кутия има места за 64 бонбона, разположени в 8 реда и 8 колонки.

а) Можете ли така да подредите 32 бонбона в кутията, че във всяка колонка да има по 4 бонбона и да няма два реда с равен брой бонбони?

б) Предложете начин, по който квадратна кутия с 20 реда и 20 колонки може да се подреди с бонбони по следния начин: във всяка колонка да има точно по 10 бонбона и да няма два реда с равен брой бонбони.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 25 февруари 2013 г.

Т Е М А   З А   6   К Л А С

Задача 1. Намерете неизвестните числа x и y от равенствата:

$$3^{40}:x-\left|27^{13}-9^{19}\right|=81^{10}-\left(8^{27}+\left|2^{81}-3^{54}\right|\right):3^{15},$$

$$2013:(2013-2013.y)=4027.$$

Сравнете числата x и $\frac{1}{y}$.

Задача 2. В координатна система с единична отсечка 1 см са дадени точките $A(-2;-2)$, $B(1;0)$ и $C(1;3)$. Намерете точка D в равнината, която заедно с дадените три точки образува успоредник. Колко такива точки има? Намерете лицата на успоредниците.

Задача 3. В първия ред на таблица с три колони са записани съответно три цели числа a, b и c. Под тях на втория ред са записани числата $a_1=a-b, b_1=b-c$ и $c_1=c-a$. По същия начи на третия ред са записани разликите $a_2=a_1-b_1, b_2=b_1-c_1$ и $c_2=c_1-a_1$, и т.н. Да се намери възможно най-големият номер на ред, в който числото 2013 може да се появи при подходящ избор на първоначалните числа.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

Р Е П У Б Л И К А Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 25 февруари 2013 г.

Т Е М А З А 7 К Л А С

Задача 1. Естественото число m е разлика на два квадрата, ако съществуват естествени числа n и k така, че $m = n^2 - k^2$. Пример на такова число е 9, защото $9 = 25 - 16 = 5^2 - 4^2$. Ако е възможно, представете като разлика на два квадрата числото:
а) 99 225; б) 99 226.

Задача 2. Даден е равнобедрен триъгълник ABC $\left(AC = BC\right)$ с $\sphericalangle ACB = 30^\circ$. Точките M и N са от основата AB, а точките P и Q са съответно от бедрата AC и BC така, че $AM + AP = BN + BQ = AB$. Да се намери ъгълът между правите PN и MQ.

Задача 3. Дадени са 22 последователни естествени числа. Колко най-много могат да се изберат от тях така, че абсолютните стойности на разликите им по двойки да са различни?

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.

Пожелаваме Ви успех!

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 25 февруари 2013 г.

Т Е М А   З А   8   К Л А С

Задача 1. Дадена е функцията $f(x)=|2x-3|-2x$.

а) Да се намерят стойностите на x, за които $f(x)=-3$.

б) Да се реши уравнението $f(x)=a$, където a е реален параметър.

Задача 2. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Нека точките M и N са средите съответно на страните AB и CD, а точките K и L са съответно от страните AD и BC. Да се пресметне дължината на отсечката LC, ако $AK=8$, $KD=10$, $BL=11$ и четириъгълникът $KMLN$ е успоредник.

Задача 3. Нека T е множеството на едноцифрените, двуцифрените и трицифрените неотрицателни цели числа. Всеки елемент на T може да се запише във вида $\overline{abc}$, където a, b и c са цифри от 0 до 9 включително. Елементите на T ще наричаме кодове. Ако R е произволен код, с евентуално разместване на цифрите му образуваме възможно най-големия код $M(R)\in T$ и възможно най-малкия код $m(R)\in T$. Нека $R_1=M(R)-m(R)$ и $R_k=M(R_{k-1})-m(R_{k-1})$ за всяко $k=2, 3, \ldots$ Да се намери най-малкото естествено число n, при което от всяко $n-$елементно подмножество на T могат да се изберат два различни кода P и Q, за които съществува k така, че P_k и Q_k се делят на 5.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.

Пожелаваме Ви успех!

Министерство на образованието, младежта и науката
Съюз на математиците в България

---

62 Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 25 февруари 2013 г.

Тема за 9. клас

Задача 1. Да се докаже, че ако за дължините на страните на $\triangle ABC$ е в сила равенството $AB+BC=2AC$, то върхът B, центърът на вписаната в триъгълника окръжност и средите на страните AB и BC лежат на една окръжност.

Задача 2. Да се намерят всички стойности на реалните параметри a и b, за които полиномът $f(x)=x^3-bx^2+(3-a^2)x+3b$ е такъв, че $f(a-1)=f(a+1)$ и при делението му на полинома $x-b$ се получава остатък $(-2a)$.

Задача 3. Нека p е просто число. Да се намерят всички цели числа x и y, за които

$$(2x+y)^3=p^2x(x+y)^2.$$

Задача 4. Нека A е множество от естествени числа със следното свойство: За всеки два елемента $m,n\in A$, $m\neq n$, е в сила неравенството

$$10|m-n|+50\geq mn.$$

Да се намери максималният възможен брой елементи на A.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа: 4 часа и 30 минути

Министерство на образованието, младежта и науката
Съюз на математиците в България

---

62 Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 25 февруари 2013 г.

<u>Тема за 10. клас</u>

Задача 1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$x^3 + ax^2 - (1-a)^2 = 0$$

има три различни реални корена x_1, x_2, x_3, изпълняващи неравенството

$$\frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2}{x_3x_1} + \frac{x_3}{x_1x_2} > \frac{3}{2}.$$

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$ с $\sphericalangle ACB > 90^\circ$. Нека CH е височината от върха C ($H \in AB$), а AL е ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ ($L \in BC$). Да се намери $\sphericalangle ALC$, ако е известно, че $\sphericalangle ALC = \sphericalangle BHL$.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа n, за които

$$2^{n+1} \text{ дели } 7^{n!} - 3^{n!}.$$

(С $n!$ се означава произведението на естествените числа от 1 до n.)

Задача 4. Нека $A(n,k)$ е броят на k-орките $(a_1, \ldots, a_k)$ от цели числа, за които е изпълнено

$$\begin{aligned} a_1 + \ldots + a_{k-1} &\leq n, \\ a_1 + \ldots + a_{k-1} + a_k &> n, \\ 1 \leq a_i \leq n, &\qquad i = 1\ldots,k. \end{aligned}$$

За кое k стойността на $A(12,k)$ е максимална?

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа: 4 часа и 30 минути

Министерство на образованието, младежта и науката
Съюз на математиците в България

---

62 Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 25 февруари 2013 г.

Тема за 11. клас

Задача 1. Да се намерят стойностите на реалните параметри p, q и r, ако числата $p, -\frac{q}{2}, r$ образуват аритметична прогресия и уравнението

$$x^3 + px^2 + qx + r - 1 = 0$$

има три корена, които са естествени числа и образуват аритметична прогресия с разлика 2013.

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$, вписан в окръжност k с център O. Допирателната към k в точка C пресича лъча $BA^{\rightarrow}$ в точка S. Върху лъча $CA^{\rightarrow}$ след точка A са избрани точки P и Q, за които $AP = PQ$. Да се докаже, че точките P, O, C и S лежат на една окръжност, тогава и само тогава, когато точките Q, B, C и S лежат на една окръжност.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа m и n, за които

$$n = m^{\varphi(n)} - 1.$$

(За всяко естествено число n с $\varphi(n)$ се означава броя на естествените числа, по-малки или равни на n, които са взаимно прости с n.)

Задача 4. Нека M е множество от естествени числа, всяко от които има 2013 цифри и не съдържа 0 в десетичния си запис. Две числа от M ще наричаме *съседни*, ако цифрите им съвпадат в поне един разряд. Да се определи максималният брой елементи на M, ако измежду всеки 9 числа от M можем да изберем 3, всеки две от които са съседни.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа: 4 часа и 30 минути

Министерство на образованието, младежта и науката
Съюз на математиците в България

---

62 Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 25 февруари 2013 г.

Тема за 12. клас

Задача 1. Да се реши в цели числа уравнението

$$x^3 = (x - y)(3xy + 1).$$

Задача 2. Нека I е центърът на вписаната в $\triangle\ ABC$ окръжност и A_1, B_1, C_1 са центровете на оръжностите, описани около $\triangle\ BIC, \triangle\ CIA$ и $\triangle\ AIB$. Да се докаже, че:

а) правите AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка;

б) $\dfrac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \dfrac{R}{2r}$, където r и R са радиусите на вписаната и описаната окръжност на $\triangle\ ABC$.

Задача 3. Числата $\dfrac{1}{5}$ и $\dfrac{1}{5}$ се заменят със сумата и произведението им. За новите числа $\dfrac{2}{5}$ и $\dfrac{1}{25}$ се прилага същата операция и т.н. Да се докаже, че във всеки момент числата са по-малки от $\dfrac{1}{2}$.

Задача 4. Нека P е полином от 2013 степен с реални коефициенти така, че за произволни числа $x, y, z \in \mathbb{R}$, за които $P(x) + P(y) + P(z) = 0$, следва, че $P(x^3) + P(y^3) + P(z^3) = 3P(x)P(y)P(z)$. Да се докаже, че:

а) $P(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$;

б) P е нечетна функция.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа: 4 часа и 30 минути

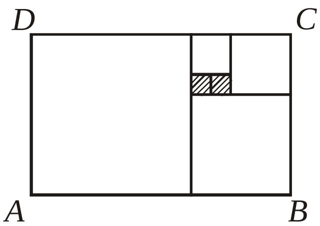
НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА – ОБЛАСТЕН КРЪГ (25.02.2013 г.)

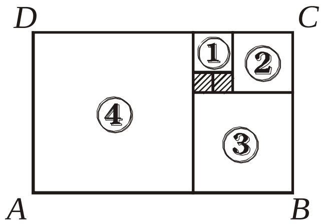
Задача 4.1. Утроените години на Живко, събрани с тези на по-малката му сестра Габриела, дават 20. На колко години е всеки от тях?

Решение: Годините на Живко са най-много 6, защото $3.7=21>20$. **(3 т.)** От друга страна, не е възможно Живко да е на по-малко от 6 години **(3 т.)** (заедно с обосновката за това), защото, ако например е на 5 години, то тогава $3.5=15$ и Габриела трябва да е на $20-15=5$ години. Това противоречи на условието, че Габриела по-малка от брат си. Следователно Живко е точно на 6 години. Сега $3.6=18$ и $20-18=2$, т.е. Габриела е на 2 години **(1 т.)**.

Забележка: Само за посочен верен отговор на задачата се присъжда **(1 т.)**.

Задача 4.2. Правоъгълникът *ABCD* е разделен на 6 квадрата, както е показано. Да се намери обиколката на *ABCD*, ако обиколката на правоъгълника, образуван от двата защриховани най-малки квадрата, е 54 см.





Решение: Тъй като обиколката на правоъгълника, образуван от двата защриховани най-малки квадрата, е 6 пъти по-голяма от обиколката на един защрихован квадрат, то дължината на страната на всеки от най-малките квадрати е $54:6=9$ см. **(1 т.)** Да номерираме останалите квадрати, както е показано на чертежа. Така страната на квадрат № 1 е $9\,\text{см}+9\,\text{см}=18\,\text{см}$ **(1 т.)**, страната на квадрат № 2 е $9\,\text{см}+18\,\text{см}=27\,\text{см}$ **(1 т.)**, страната на квадрат № 3 е $18\,\text{см}+27\,\text{см}=45\,\text{см}$ **(1 т.)**, а страната на квадрат № 4 е $27\,\text{см}+45\,\text{см}=72\,\text{см}$ **(1 т.)**. Следователно $AB=72\,\text{см}+45\,\text{см}=117\,\text{см}$ **(1 т.)** и обиколката на правоъгълника *ABCD* е $2.117+2.72=378$, т. е. $378\,\text{см}$. **(1 т.)**

Задача 4.3. Един ден учителят по математика г-н Иванов влязъл в час с една много дебела книга. Учениците се поинтересували каква е тази книга и той им обяснил, че е математическа енциклопедия. Те били очаровани и го попитали колко страници има книгата. Г-н Иванов отговорил, че могат сами да се опитат да пресметнат и добавил, че за номерирането на всички страници са били използвани общо 6945 цифри. Намерете колко страници има енциклопедията, ако е известно, че номерирането започва с 1.

Решение: Броят на всички едноцифрени числа без нулата е 9 **(1 т.)**. Двуцифрените числа са 90, а трицифрените – 900 **(1 т.)**. Броят на цифрите, срещащи се в едноцифрените, двуцифрените и трицифрените числа, е

$$9+90.2+900.3=9+180+2700=2889 \text{ \textbf{(1 т.)}}.$$

Тъй като числото 2889 е по-малко от 6945, то книгата има страници, номерирани с четирицифрени числа **(1 т.)**. Но $6945-2889=4056$ цифри **(1 т.)** и $4056:4=1014$ е броят на използваните четирицифрени числа **(1 т.)**. Следователно математическата енциклопедия е имала $9+90+900+1014=2013$ страници **(1 т.)**.

Задача 5.1. Числото $A=2013,397313...$ има 33 цифри. При това всяка цифра след десетичната запетая е цифрата на единиците на произведението от предхождащите я две цифри.

а) Коя е цифрата на 29-а позиция след десетичната запетая?

б) Колко пъти цифрата 3 участва в записа на *A*?

Решение: а) Верният отговор е 1. За посочването му **(2 т.)**. Ако отговорът е обоснован или открит с непосредствени пресмятания **(1 т.)**.

б) При последователното пресмятане на цифрите след десетичната запетая на 6-а и 7-а позиция се получават тройки. Понеже в началото има две последователни тройки (единиците и десетите са тройки), цифрата на 8-а позиция ще съвпада с тази на 2-а позиция (равна е на 9). Оттук следва, че цифрата на 9-а позиция ще съвпада с тази на 3-а позиция (т.е. със 7) и т.н. По този начин установяваме, че групата от първите 6 цифри след десетичната запетая ще се повтаря, докато е възможно. **(1 т.)** Числото A има $33-4=29$ цифри след десетичната запетая. **(1 т.)** Понеже $29=4.6+5$, в числото A след десетичната запетая ще има 4 пълни групи от цифрите 397313 и една непълна от първите 5 цифри: 39731. **(1 т.)** Всяка пълна група съдържа три тройки. Така преброяваме $4.3=12$ тройки в пълните групи след десетичната запетая. Към този брой добавяме двете тройки от непълната група и още една от цялата част на A. Следователно в записа на A участват общо 15 тройки. **(1 т.)**

Пълен брой точки **(4 т.)** на подусловие б) се получават и при непосредствено вярно изписване на A и преброяване. Точки не се присъждат, ако са допуснати грешки в пресмятанията.

Задача 5.2. Аквариум има форма на правоъгълен паралелепипед, височината на който е по-малка от дължината. Ако вътрешността на аквариума е запълнена плътно с еднакви кубчета с ръб 1 дм, 6 кубчета от тях няма да се допират нито до стена, нито до дъното на аквариума.

а) Какви могат да са размерите на такъв аквариум?

б) Най-много колко рибки могат да живеят в такъв аквариум, ако водата в него може да достига не повече на $\frac{9}{10}$ от височината му, а една рибка се нуждае от поне 3 литра вода?

Решение: а) Шестте кубчета, за които става дума в условието, оформят паралелепипед. Размерите на този паралелепипед в дециметри могат да са $6\times1\times1$ или $3\times2\times1$. **(1 т.)** Размерите на аквариума се получават по следния начин: дължината и широчината са с 2 дм по-големи от съответната дължина и широчина на паралелепипеда, а височината е с 1 дм по-голяма. **(1 т.)** Понеже височината е по-малка от дължината, аквариумите, отговарящи на условието, имат размери (дължина)$\times$(широчина)$\times$(височина) в дециметри, съответно равни на:

(1) $8\times3\times2$, (2) $3\times8\times2$, (3) $5\times3\times3$, (4) $5\times4\times2$, (5) $4\times5\times2$. **(2 т.)**

б) От намерените размери в а) следва, че най-много рибки ще се съберат в аквариумите (1) и (2), понеже в тях може да се налее най-много вода. **(1 т.)** Водата, която може да се налее в тези два аквариума, е $8.3.(2.0,9)$ литра. **(1 т.)** Тази вода е достатъчна за не повече от $8.3.(2.0,9):3=8.(2.0,9)=14,4$ рибки.

Отговор: 14 рибки. **(1 т.)**

Задача 5.3. В квадратна кутия има места за 64 бонбона, разположени в 8 реда и 8 колонки.

а) Можете ли така да подредите 32 бонбона в кутията, че във всяка колонка да има по 4 бонбона и да няма два реда с равен брой бонбони?

б) Предложете начин, по който квадратна кутия с 20 реда и 20 колонки може да се подреди с бонбони по следния начин: във всяка колонка да има точно по 10 бонбона и да няма два реда с равен брой бонбони.

Решение: а) Отговор: да.

Ето едно примерно разположение на бонбоните. **(5 т.)**

Б	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Б
	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Б
Б							
		Б	Б	Б	Б	Б	Б
Б	Б						
			Б	Б	Б	Б	Б
Б	Б	Б					

б) *Стратегия за пълнене на кутията от подусловие а).* Групираме редовете по два и се стремим да подредим бонбоните така, че всяка двойка редове да съдържа точно по един бонбон във всяка колонка. Така си гарантираме по 4 бонбона в колонка, понеже двойките редове са 4. Ясно е, че бонбоните в двойка редове трябва да са точно 8. Остава да си осигурим във всеки ред да има различен брой бонбони. Това може да стане по следния начин. Първоначално във всяка двойка единият ред е празен, а другият е пълен. Първата двойка не пипаме. Във втората двойка преместваме един бонбон от пълния ред на съответното място в празния. Така по-пълният ред съдържа 7 бонбона, а по-празният съдържа 1. В третата двойка преместваме два бонбона от пълния ред на съответните места в празния, като по този начин си осигуряваме редове с 6 и 2 бонбона. В последната двойка местим 3 бонбона по указания начин и си осигуряваме редове с 5 и 3 бонбона. (Ред с 4 бонбона няма.)

Тази стратегия се пренася непосредствено и в случая на кутия $n\times n$. **(2 т.)**

Задача 6.1. Намерете неизвестните числа x и y от равенствата:

$$3^{40}:x-\left|27^{13}-9^{19}\right|=81^{10}-\left(8^{27}+\left|2^{81}-3^{54}\right|\right):3^{15},$$

$$2013:\left(2013-2013.y\right)=4027.$$

Сравнете числата x и $\frac{1}{y}$.

Решение: За първото равенство най-напред пресмятаме:

$$27^{13}-9^{19}=3^{39}-3^{38}>0\Rightarrow\left|27^{13}-9^{19}\right|=27^{13}-9^{19}. \text{ (1) } \textbf{(1 т.)}$$

$$2^{81}-3^{54}=8^{27}-9^{27}<0\Rightarrow\left|2^{81}-3^{54}\right|=3^{54}-8^{27}. \text{ (2) } \textbf{(1 т.)}$$

Като заместим (1) и (2) в равенството, получаваме последователно:

$$3^{40}:x-27^{13}+9^{19}=9^{20}-\left(8^{27}+3^{54}-8^{27}\right):3^{15}\Leftrightarrow 3^{40}:x-3^{39}+9^{19}=9^{20}-\frac{3^{54}}{3^{15}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{40}:x-3^{39}+9^{19}=9^{20}-3^{39}\Leftrightarrow 3^{40}:x+9^{19}=9^{20}\Leftrightarrow 9^{20}:x=9^{20}-9^{19}.$$

Оттук $x=\frac{9^{20}}{9^{20}-9^{19}}=\frac{9^{20}}{9^{19}.\left(9-1\right)}=\frac{9^{20}}{9^{19}.8}$ или $x=\frac{9}{8}$. **(2 т.)**

От второто равенство намираме:

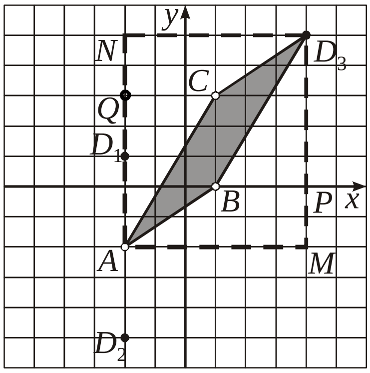
$$2013:\left(2013-2013.y\right)=4027\Leftrightarrow 2013-2013.y=\frac{2013}{4027}\Leftrightarrow 2013.y=2013-\frac{2013}{4027}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2013.y=2013.\left(1-\frac{1}{4027}\right), \text{ откъдето } y=1-\frac{1}{4027}=\frac{4026}{4027}. \textbf{ (2 т.)}$$

И така $x=\frac{9}{8}=1+\frac{1}{8}$, а $\frac{1}{y}=\frac{4027}{4026}=1+\frac{1}{4026}$. Получаваме $x>\frac{1}{y}$, защото $\frac{1}{8}>\frac{1}{4026}$. **(1 т.)**

Задача 6.2. В координатна система с единична отсечка 1 см са дадени точките $A(-2;-2)$, $B(1;0)$ и $C(1;3)$. Намерете точка D в равнината, която заедно с дадените три точки образува успоредник. Колко такива точки има? Намерете лицата на успоредниците.

Решение: За всяка от трите отсечки, определени от трите дадени точки, съществува успоредник със страна тази отсечка и противоположна страна с дължина, равна на дължината на отсечката, успоредна на отсечката и с край в третия връх. Така получаваме четвъртия връх на съответния успоредник, т.е. трите точки $D_1(-2;1)$ **(1 т.)**, $D_2(-2;-5)$ **(1 т.)** и $D_3(4;5)$ **(1 т.)**. Лесно се вижда, че $S_{ABCD_1}=S_{AD_2BC}=3.3=9$ кв. см. **(2 т.)** За S_{ABD_3C} имаме:



$$S_{ABD_3C}=S_{AMD_3N}-\left(S_{AMPB}+S_{BPD_3}+S_{D_3NQC}+S_{AQC}\right)=42-(9+7,5+9+7,5)=9,$$

т.е. $S_{ABD_3C}=9$ кв. см. **(2 т.)** Лицата могат да се пресметнат и с формула на Пик.

Задача 6.3. В първия ред на таблица с три колони са записани съответно три цели числа a,b и c. Под тях на втория ред са записани числата $a_1=a-b, b_1=b-c$ и $c_1=c-a$. По същия начи на третия ред са записани разликите $a_2=a_1-b_1, b_2=b_1-c_1$ и $c_2=c_1-a_1$, и т.н. Да се намери възможно най-големият номер на ред, в който числото 2013 може да се появи при подходящ избор на първоначалните числа.

Решение:

Първи ред	a	b	c
Втори ред	$a-b$	$b-c$	$c-a$
Трети ред	$a-2b+c$	$b-2c+a$	$c-2a+b$
Четвърти ред	$-3b+3c$	$-3c+3a$	$-3a+3b$
Пети ред	$-3b+6c-3a$	$-3c+6a-3b$	$-3a+6b-3c$
Шести ред	$9c-9a$	$9a-9b$	$9b-9c$
…	…	…	…

Попълване на няколко реда на таблицата (поне четири): **(2 т.)**.

Числото 2013 не може да се появи след петия ред, защото на шестия ред всички числа се делят на 9, което означава, че на всеки следващ ред числата ще продължат да се делят на 9. В същото време 2013 не се дели на 9. **(2 т.)**

Ако изберем числата $a=0, b=-671, c=0$, то числата на петия ред са 2013, 2013, –4026. **(3 т.)**

Задача 7.1. Естественото число m е разлика на два квадрата, ако съществуват естествени числа n и k така, че $m=n^2-k^2$. Пример на такова число е 9, защото $9=25-16=5^2-4^2$. Ако е възможно, представете като разлика на два квадрата числото:

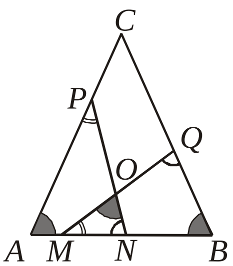
а) 99 225; б) 99 226.

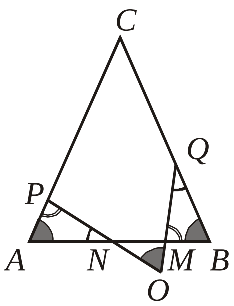
Решение: а) Ако $99\,225 = n^2 - k^2 = (n-k)(n+k)$, достатъчно е да покажем, че съществуват естествени числа n и k така, че $n-k=1$ и $n+k=99\,225$. От последните две равенства след почленно събиране намираме $2n = 99\,226$, т.е. $n = 49\,613$, а след почленно изваждане на първото равенство от второто – съответно $2k = 99\,224$, т.е. $k = 49\,612$. Следователно $99\,225 = 49\,613^2 - 49\,612^2$. **(3 т.)** Възможни са и други представяния на 99 225 като разлика на два квадрата.

б) Ако $99\,226 = n^2 - k^2 = (n-k)(n+k)$, то числото $(n-k)(n+k)$ е нечетно в случай, че n и k са с различна четност и $(n-k)(n+k)$ се дели на 4 в случай, че n и k са с еднаква четност. Тъй като числото 99 226 е четно , но не се дели на 4, то не може да се представи като разлика на два квадрата. **(4 т.)**

Задача 7.2. Даден е равнобедрен триъгълник *ABC* $(AC = BC)$ с $\sphericalangle ACB = 30°$. Точките *M* и *N* са от основата *AB*, а точките *P* и *Q* са съответно от бедрата *AC* и *BC* така, че $AM + AP = BN + BQ = AB$. Да се намери ъгълът между правите *PN* и *MQ*.

Решение: От равнобедрения триъгълник *ABC* намираме $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 75°$. **(1 т.)** Възможни са два случая за разположението на точката *M*. Нека *M* е между *A* и *N*. От $AM + AP = AB = AM + BM$ следва, че $AP = BM$. **(1 т.)** Аналогично от $AN + BN = AB = BN + BQ$ следва, че $AN = BQ$. **(1 т.)** Тогава $\Delta ANP \cong \Delta BQM$ по първи признак. **(1 т.)** Оттук $\sphericalangle APN = \sphericalangle BMQ$ и $\sphericalangle ANP = \sphericalangle BQM$. **(1 т.)** Сега от ΔMON намираме $\sphericalangle MON = 180° - (\sphericalangle MNO + \sphericalangle NMO) = 180° - (\sphericalangle APN + \sphericalangle ANP) = \sphericalangle BAC = 75°$. **(1 т.)** По същия начин се разглежда и случаят, когато *N* е между *A* и *M*. **(1 т.)**





Задача 7.3. Дадени са 22 последователни естествени числа. Колко най-много могат да се изберат от тях така, че абсолютните стойности на разликите им по двойки да са различни?

Решение: Нека a_1, a_2, …, a_7 са 7 от дадените числа. Броят на двойките между тях е $\frac{7.6}{2} = 21$, а абсолютните стойности на възможните разлики са числата 1, 2, 3, …, 21. Ако седемте числа изпълняват условието на задачата, то със сигурност е в сила равенството:

$$1 + 2 + ... + 21 = |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + ... + |a_1 - a_7| +$$
$$+ |a_2 - a_3| + ... + |a_2 - a_7| +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Като разкрием абсолютните стойности, всяко от числата a_1, a_2, …, a_7 ще се появи точно по 6 пъти със знак "+" или знак "–". След съответно съкращаване всяко от числата ще остане с един и същ знак и сборът на оставащите представители ще бъде четен (възможно и нула). Заключаваме, че сборът на всички числа, оставащи вдясно на горното равенство, е четно число (като сума на четни) и това е противоречие, защото сумата вляво $1+2+...+21=\frac{(1+21)\cdot 21}{2}=11\cdot 21$ е нечетна. Следователно търсеният брой ненадминава 6. **(4 т.)** (**(1 т.)**, ако е разгледан само очевидният случай на 8 числа, при който всевъзможните двойки са $\frac{8.7}{2}=28$, а разликите са 21.)

Да означим дадените 22 числа с $n_1<n_2<n_3<...<n_{22}$. Непосредствено се проверява, че числата n_1, n_2, n_4, n_8, n_{13} и n_{21} (които са точно 6 на брой) изпълняват условието на задачата. Проверката се извършва най-лесно, ако се вземе предвид, че дадените числа са последователни и като ги транслираме наляво, можем да считаме, че са първите 22 естествени числа, т.е. достатъчно е да се извърши проверка с числата 1, 2, 4 , 8, 13 и 21. **(3 т.)** При липса на проверка се отнема **(1 т.)**, т.е. с **(3 т.)** се оценява посочването на пример заедно с проверката, че примерът е работещ.

Задача 8.1. Дадена е функцията $f(x)=|2x-3|-2x$.

а) Да се намерят стойностите на x, за които $f(x)=-3$.

б) Да се реши уравнението $f(x)=a$, където a е реален параметър.

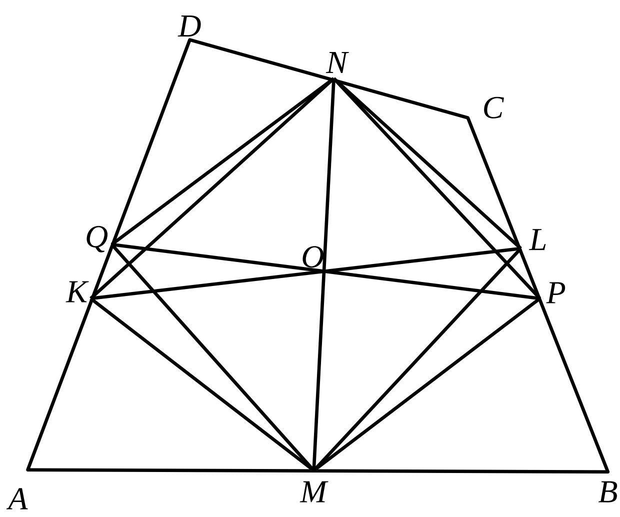
Решение: а) Тъй като $|2x-3|=2x-3$ при $x\geq\frac{3}{2}$ и $|2x-3|=3-2x$ при $x<\frac{3}{2}$, то $f(x)=-3$ при $x\geq\frac{3}{2}$ **(1 т.)** и $f(x)=-4x+3$ при $x<\frac{3}{2}$ **(1 т.)**, т.е. $f(x)=\begin{cases}-4x+3 & \text{при } x<\frac{3}{2}\\ -3 & \text{при } x\geq\frac{3}{2}\end{cases}$.

Заключаваме, че $f(x)=-3$ при $x\geq\frac{3}{2}$. **(1 т.)**

б) Имаме $-4x+3=a\Rightarrow x=\frac{3-a}{4}$. От $\frac{3-a}{4}<\frac{3}{2}\Rightarrow a>-3$. **(1 т.)**

Следователно при $a<-3$ уравнението $f(x)=a$ няма решение. **(1 т.)** При $a=-3$ решение е всяко $x\geq\frac{3}{2}$ **(1 т.)** и при $a>-3$ решението е $x=\frac{3-a}{4}$. **(1 т.)**

Задача 8.2. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Нека точките M и N са съответно средите на страните AB и CD, а точките K и L са съответно от страните AD и BC. Да се пресметне дължината на отсечката LC, ако $AK=8$, $KD=10$, $BL=11$ и четириъгълникът $KMLN$ е успоредник.



Решение: От условието е ясно, че K не е среда на AD ($AK=8\neq 10=KD$). Нека точките Q и P са съответно средите на страните AD и BC. От теоремата на Вариньон следва, че четириъгълникът $MPNQ$ е успоредник **(1 т.)**. Но $KMLN$ е също успоредник (по условие). Във всеки успоредник диагоналите се разполовяват от пресечната им точка (в случая O) **(1 т.)**. Оттук следва еднаквостта на триъгълниците KOQ и LOP по първи признак **(1 т.)**. В частност следва равенство на $\sphericalangle OKQ$ и $\sphericalangle OLP$. Но тогава $AD \parallel BC$. **(1 т.)** Излиза, че четириъгълниците $ABLK$ и $LCDK$ са трапеци **(1 т.)** и са изпълнени равенствата $AK + BL = 2MO = 2ON = KD + CL$ (MO и ON са средни основи в трапеците) **(1 т.)**. Сега лесно намираме, че $LC = 9$. **(1 т.)**

Задача 8.3. Нека T е множеството на едноцифрените, двуцифрените и трицифрените неотрицателни цели числа. Всеки елемент на T може да се запише във вида $\overline{abc}$, където a, b и c са цифри от 0 до 9 включително. Елементите на T ще наричаме кодове. Ако R е произволен код, с евентуално разместване на цифрите му образуваме възможно най-големия код $M(R) \in T$ и възможно най-малкия код $m(R) \in T$. Нека $R_1 = M(R) - m(R)$ и $R_k = M(R_{k-1}) - m(R_{k-1})$ за всяко $k = 2, 3, \ldots$ Да се намери най-малкото естествено число n, при което от всяко $n-$елементно подмножество на T могат да се изберат два различни кода P и Q, за които съществува k така, че P_k и Q_k се делят на 5.

Решение: Нека $R = \overline{abc}$ е код. Без ограничение можем да считаме, че $a \geq b \geq c$. Да предположим, че R е с поне две различни цифри. Тогава $a \neq c$. Имаме:

$$R_1 = M(R) - m(R) = \overline{abc} - \overline{cba} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99(a - c).$$

Поради споменатите неравенства $a - c$ е някоя от цифрите от 1 до 9. Във всеки от тези случаи за R_1 получаваме съответно $99.1 = 99 = 099$, $99.2 = 198$, $99.3 = 297$, $99.4 = 396$, $99.5 = 495$, $99.6 = 594$, $99.7 = 693$, $99.8 = 792$ и $99.9 = 891$. Най-големите кодове, които могат да се получат с цифрите на всеки от изброените кодове, са съответно: 990, 981, 972, 963, 954, 954, 963, 972 и 981. Да изключим повтарящите се и да въведем означенията $A = 990$, $B = 981$, $C = 972$, $D = 963$ и $E = 954$. За по-нататъшните преобразувания на R_1 получаваме една от следните възможности: $A_1 = 990 - 099 = 891$, $B_1 = 981 - 189 = 792$, $C_1 = 972 - 279 = 693$, $D_1 = 963 - 369 = 594$ и $E_1 = 954 - 459 = 495$. **(2 т.)** Забелязваме, че $A_2 = B_1$, $B_2 = C_1$, $C_2 = D_1$, $D_2 = E_1$ и $E_2 = E_1$. **(1 т.)** Така заключаваме, че тръгвайки от R, най-много след 6 стъпки преобразуванията се стабилизират в E_1. **(1 т.)** Следователно, ако изберем седем кода, всеки от които има най-много две еднакви цифри, два от тях със сигурност ще се преобразуват в $E_1 = 495$ след еднакъв брой стъпки k $(1 \leq k \leq 6)$. **(1 т.)** Тъй като $E_1 = 495$ се дели на 5, в този случай получаваме, че $n = 2$. **(1 т.)**

Нека сега $R = \overline{aaa}$, т.е. всички цифри на R са еднакви. Имаме $R_1 = 0 = 000$. След произволен брой стъпки кодът R_1 се преобразува отново в 0 и R_k се дели на 5 за всяко $k \geq 1$. Следователно, ако в най-лошия случай изберем шест кода, които се преобразуват в $E_1 = 495$ след различен брой стъпки, както и кода $R = \overline{aaa}$, комбинацията на R с всеки от избраните шест кода образува двойка, която след еднакъв брой стъпки k $(1 \leq k \leq 6)$ се преобразува в двойка, елементите на която се делят едновременно на 5. **(1 т.)** Ако случаят 000 е изпуснат, се отнема **(1 т.)**. Така и в този случай $n = 2$, което е отговорът на задачата.

Задачите са продложени, както следва:

4.1. – Живко Желев; 4.2. – Теодоси Витанов; 4.3. – Живко Желев
5.1. – Ирина Шаркова; 5.2. – Борислав Лазаров; 5.3. – Емил Карлов
6.1. – Емил Стоянов; 6.2. – Теодоси Витанов; 6.3. – Иван Ангелов
7.1. – Веселин Ненков и Сава Гроздев; 7.2. – Теодоси Витанов; 7.3. – Веселин Ненков и Сава Гроздев
8.1. – Теодоси Витанов; 8.2. – Емил Стоянов; 8.3. – Веселин Ненков и Сава Гроздев

Министерство на образованието, младежта и науката
Съюз на математиците в България

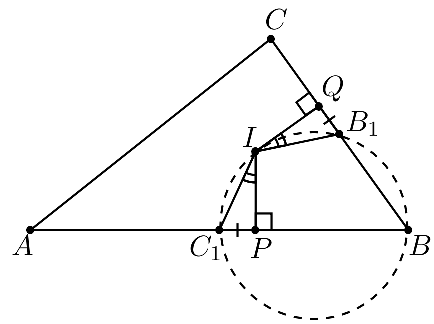
62 Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 25 февруари 2013 г.

София, 2013 г.

Условия, кратки решения и инструкции за оценяване

Задача 9.1. Да се докаже, че ако за дължините на страните на $\triangle ABC$ е в сила равенството $AB + BC = 2AC$, то върхът B, центърът на вписаната в триъгълника окръжност и средите на страните AB и BC лежат на една окръжност.



Решение. Ще използваме стандартните означения за $\triangle ABC$. По условие $a + c = 2b$ и без ограничение на общността може да считаме, че $a < b < c$. Нека C_1 е средата на AB, B_1 е средата на BC, I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, $IP \perp AB$, $P \in AB$ и $IQ \perp BC$, $Q \in BC$. Тъй като P и Q са допирните точки на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност съответно със страните BC и AB, то

$$BP = BQ = p - b = \frac{b}{2},\ B_1Q = BQ - BB_1 = \frac{b-a}{2},\ C_1P = BC_1 - BP = \frac{c-b}{2}$$

и следователно $B_1Q = C_1P$. Тогава по първи признак $\triangle IB_1Q \cong \triangle IC_1P$, откъдето $\sphericalangle B_1IQ = \sphericalangle C_1IP$, $\sphericalangle C_1IB_1 = \sphericalangle PIQ = 180^\circ - \sphericalangle ABC$ и следователно четириъгълникът C_1BB_1I е вписан.

<u>**Оценяване:**</u> 1 т. за построяване на точките P и Q; 2 т. за доказване, че $C_1P = B_1Q$; 1 т. за $\triangle IB_1Q \cong \triangle IC_1P$; 3 т. за C_1BB_1I – вписан.

Задача 9.2. Да се намерят всички стойности на реалните параметри a и b, за които полиномът $f(x) = x^3 - bx^2 + (3 - a^2)x + 3b$ е такъв, че $f(a-1) = f(a+1)$ и при делението му на полинома $x - b$ се получава остатък $-2a$.

Решение. Условието $f(a-1) = f(a+1)$ е еквивалентно (след съответните пресмятания) на $ab = a^2 + 2$, а от другото изискване $f(b) = -2a$ получаваме $2a + 6b = a^2b$. От тези две равенства изразяваме $b = \dfrac{a^2+2}{a} = \dfrac{2a}{a^2-6}$ (лесно се вижда, че $a = 0$ и $a^2 = 6$ не водят до решение). Следователно $\dfrac{a^2+2}{a} = \dfrac{2a}{a^2-6}$, откъдето получаваме биквадратното уравнение $a^4 - 6a^2 - 12 = 0$. Тогава $a^2 = 3 \pm \sqrt{21}$, т.е. $a = \pm\sqrt{3+\sqrt{21}}$ и съответно $b = \pm\frac{5+\sqrt{21}}{\sqrt{3+\sqrt{21}}}$.

<u>**Оценяване:**</u> По 2 т. за получаване на всяко от двете уравнения, 3 т. за решаване на системата.

Задача 9.3. Нека p е просто число. Да се намерят всички цели числа x и y, за които

$$(2x+y)^3 = p^2x(x+y)^2.$$

Решение. Да положим $2x+y = A$ и $x+y = B$. Получаваме равенството $A^3 = p^2B^2(A-B)$, от което следва, че $p|A$. Нека $A = pA_1$, където A_1 е цяло число. Тогава $pA_1^3 = B^2(pA_1 - B)$, откъдето следва, че $p|B$ (в противен случай дясната страна не се дели на p). Нека $B = pB_1$, където B_1 е цяло число. Получаваме $A_1^3 = p^2B_1^2(A_1 - B_1)$, което е от същия вид, както полученото по-горе уравнение $A^3 = p^2B^2(A-B)$, и следователно можем да продължим с аналогични разсъждения. Ясно е, че при $A \neq 0$ този процес ще продължи безкрайно, т.е. A ще се дели на произволно висока степен на p, което е абсурдно. Следователно $A = B = 0$, откъдето веднага получаваме $x = y = 0$.

Оценяване: Ако единственият принос е да се отбележи, че $x = y = 0$ е решение, задачата се оценява с 0 т. За повече: 1 т. за полагането или за идеята да се работи със степените на p в каноничното разлагане на двете страни (но ако са направени и двете, тези точки не се събират), 2 т. за $p|B$, 3 т. за реализация на „безкрайното спускане“, 1 т. за финалния извод, че $x = y = 0$.

Задача 9.4. Нека A е множество от естествени числа със следното свойство: за всеки два елемента $m, n \in A$, $m \neq n$, е в сила неравенството $10|m-n| + 50 \geq mn$. Да се намери максималният възможен брой елементи на A.

Решение. Отговор: 9. Нека $m, n \in A$ и без ограничение на общността $m > n$. Тогава даденото неравенство се записва във вида $mn + 10n - 10m \leq 50 \iff (m+10)(n-10) \leq -50$. Последното означава, че е невъзможно да имаме $n \geq 10$. Следователно в A има най-много едно число, по-голямо от 9. Освен това лесно се вижда, че е невъзможно числата 8 и 9 едновременно да принадлежат на A. Тогава $|A| \leq 9$.

Множеството $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 15\}$ има исканото свойство и е с 9 елемента. Ясно е как са получени първите му 8 елемента, а 15 е минималното число, което отговаря на условието заедно с 8.

Оценяване: 1 т. за записване на условието във вида $(m+10)(n-10) \leq -50$, 1 т. за извода, че по-малкото от двете числа не надминава 9, 2 т. за извода, че в A може да има най-много едно число, по-голямо от 9, 1 т. за отбелязване, че 8 и 9 не могат едновременно да принадлежат на A, 2 т. за конструиране на множество с 9 елемента и исканите свойства.

Задача 10.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$x^3 + ax^2 - (1-a)^2 = 0$$

има три различни реални корена x_1, x_2, x_3, изпълняващи неравенството

$$\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}>\frac{3}{2}.$$

Решение. Имаме

$$x^3+ax^2-(1-a)^2=(x-(1-a))(x^2+x+(1-a))=0.$$

Ако D е дискриминантата на квадратния тричлен, то от $D>0$ получаваме $a>3/4$. Освен това $1-a$ не трябва да е корен на квадратния тричлен, откъдето $a\neq 1,3$. Използвайки формулите на Виет даденото по условие, получаваме

$$\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_1x_2x_3}=\frac{a^2}{(1-a)^2}>\frac{3}{2},$$

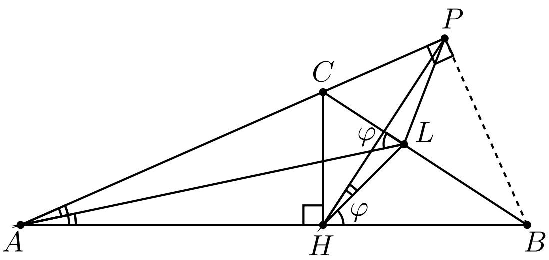
което е изпълнено точно тогава, когато $a\in(3-\sqrt{6},3+\sqrt{6})$. Така окончателно

$$a\in\left(\frac{3}{4},1\right)\cup(1,3)\cup(3,3+\sqrt{6}).$$

<u>Оценяване:</u> 1 т. за намиране на корена $x=1-a$; 1 т. за $a>3/4$; 1 т. за $a\neq 1,3$; 2 т. за свеждане на условието до квадратно неравенство за a; 1 т. за $a\in(3-\sqrt{6},3+\sqrt{6})$; 1 т. за окончателния отговор.

Задача 10.2. Даден е $\triangle ABC$ с $\sphericalangle ACB>90^\circ$. Нека CH е височината от върха C ($H\in AB$), а AL е ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ ($L\in BC$). Да се намери $\sphericalangle ALC$, ако е известно, че $\sphericalangle ALC=\sphericalangle BHL$.

Първо решение. Нека $\sphericalangle ALC=\sphericalangle BHL=\varphi$ и P е петата на височината от върха B към правата AC ($P\in AC^{\rightarrow}$). Четириъгълникът $HBPC$ е вписан в окръжност с диаметър BC и следователно $\sphericalangle BHP=\sphericalangle BCP$. Тогава



$$\sphericalangle LAP=\sphericalangle BCP-\varphi=\sphericalangle BHP-\varphi=\sphericalangle LHP,$$

т.е. $AHLP$ е вписан четириъгълник. От друга страна, AL е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$ и следователно $L\in s_{PH}$. Имаме две възможности:

Случай 1. Ако $s_{PH}\cap BC$, то L е център на описаната около $HBPC$ окръжност, т.е. $BL=LC$, $AB=AC$. Но $\sphericalangle ACB>90^\circ$ и достигаме до противоречие.

Случай 2. Ако $s_{PH} \equiv BC$, то $HBPC$ е делтоид и

$$\sphericalangle CHL = \sphericalangle CPL = \sphericalangle BHL = \varphi,$$

т.е. $\varphi = 45^\circ$.

Второ решение. Ако използваме стандартните означения за триъгълник, то

$$\frac{BL}{LC} = \frac{S_{BHL}}{S_{CHL}} = \frac{BH.\sin\varphi}{CH.\cos\varphi} = \text{cotg}\beta.\text{tg}\varphi = \text{cotg}\beta.\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right).$$

От друга страна,

$$\frac{BL}{LC} = \frac{BA}{AC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$$

и следователно

$$\cos\beta\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) = \sin(\alpha+\beta)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 90^\circ,$$

т.е. $\varphi = 45^\circ$.

Забележка. В произволен $\triangle ABC$ условието $\sphericalangle ALC = \sphericalangle BHL$ е изпълнено тогава и само тогава, когато $\sphericalangle ACB = 90^\circ + \sphericalangle ABC$.

Оценяване:

Първо решение. 1 т. за построяването на точка P; 2 т. за $AHLP$ – вписан; 1 т. за $L \in s_{PH}$; 1 т. за първия случай; 2 т. за втория случай.

Второ решение. 3 т. за достигане до тригонометрична връзка между α, β и γ; 3 т. за $2\alpha + \beta = 90$; 1 т. за $\varphi = 45^\circ$.

Задача 10.3. Да се намерят всички естествени числа n, за които

$$2^{n+1} \text{ дели } 7^{n!} - 3^{n!}.$$

(С $n!$ се означава произведението на естествените числа от 1 до n.)

Решение. Нека $n! = 2^k.m$, където m е нечетно, а k е цяло неотрицателно число. Тогава

$$7^{n!} - 3^{n!} = (7^m)^{2^k} - (3^m)^{2^k} = (7^m - 3^m)(7^m + 3^m)(7^{2m} + 3^{2m})\dots(7^{2^{k-1}m} + 3^{2^{k-1}m}).$$

Тъй като $7^m + 3^m \equiv 7^{2m} + 3^{2m} \equiv \cdots 7^{2^{k-1}m} + 3^{2^{k-1}m} \equiv 2 \pmod 4$ и $7^m - 3^m \equiv 4 \pmod 8$, то $2^{k+2} | (7^{n!} - 3^{n!})$, но $2^{k+3} \not| (7^{n!} - 3^{n!})$ и следователно $n + 1 \leqq k + 2$, т.е. $k \geqq n - 1$.

От друга страна, ако $2^t \leqq n < 2^{t+1}$ ($t \in \mathbb{N}_0$), то

$$k = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{2^t}\right] \leqq \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \cdots \frac{n}{2^t} = n\left(1 - \frac{1}{2^t}\right) \leqq n - 1.$$

Следователно $k = n - 1$ и $n = 2^t$, където $t \in \mathbb{N}_0$.

Оценяване: 2 т. за $n! = 2^k.m$ и разлагането на $7^{n!} - 3^{n!}$; 2 т. за $k \geqq n - 1$; 2 т. за $k \leqq n - 1$; 1 т. за $n = 2^t$, $t \in \mathbb{N}_0$.

Задача 10.4. Нека $A(n, k)$ е броят на k-орките $(a_1, \dots, a_k)$ от цели числа, за които е изпълнено

$$\begin{aligned} a_1 + \ldots + a_{k-1} &\leq n, \\ a_1 + \ldots + a_{k-1} + a_k &> n, \\ 1 \leq a_i \leq n, \quad & i = 1 \ldots, k. \end{aligned}$$

За кое k стойността на $A(12, k)$ е максимална?

Решение. Най-напред да пресметнем броя на k-орките $(a_1, \dots, a_k)$ от цели числа $1 \leq a_i \leq n$, за които $a_1 + \ldots + a_k \leq n$. Очевидно тази сума може да взема сойностите $k, k+1, \dots, n$ и следователно броят на тези k-орки е

$$\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \ldots + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Оттук получаваме, че броят на k-орките $(a_1, \dots, a_k)$, за които $a_1 + \ldots + a_{k-1} \leq n$, $a_1 + \ldots + a_{k-1} + a_k > n$, $1 \leq a_i \leq n$ е

$$A(n, k) = n\binom{n}{k-1} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k}\left(\frac{nk}{n-k+1} - 1\right).$$

Остава да определим, за кое k

$$A(12, k) = \binom{12}{k}\left(\frac{12k}{13-k} - 1\right)$$

е максимално. Тъй като за $1 \leq k \leq 6$ и двата множителя растат, то е максимумът се достига за $6 \leq k \leq 12$. Имаме

$$\frac{A(12, k+1)}{A(12, k)} = \frac{k(13-k)}{k^2 - 1}.$$

Това отношение е по-голямо от 1 за $k = 6$ и по-малко от 1 за $k = 7, \dots, 12$. Следователно търсеният максимум се достига за $k = 7$.

Оценяване: 4 т. за извеждане на формула за $A(n,k)$; 3 т. за намиране на стойността на k, за която $A(12,k)$ е максимално.

Задача 11.1. Да се намерят стойностите на реалните параметри p, q и r, ако числата $p, -\dfrac{q}{2}, r$ образуват аритметична прогресия и уравнението

$$x^3 + px^2 + qx + r - 1 = 0$$

има три корена, които са естествени числа и образуват аритметична прогресия с разлика 2013.

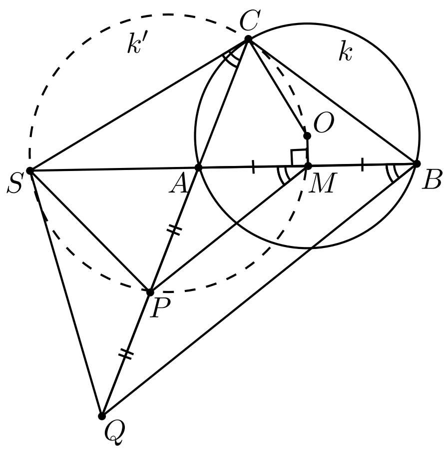
Решение. От условието $p + r = -q$ следва, че даденото уравнение има корен $x_1 = 1$. Тогава уравнението приема вида

$$(x-1)(x^2 + (p+1)x + p + q + 1) = 0,$$

като корените на квадратното уравнение $x^2 + (p+1)x + p + q + 1 = 0$ са $x_1 = 2014$ и $x_2 = 4027$. От формулите на Виет сега намираме $p = -x_1 - x_2 - 1 = -6042$ и $q = x_1x_2 - p - 1 = x_1x_2 + x_1 + x_2 = (x_1+1)(x_2+1) - 1 = 2015.4028 - 1 = 8116419$.

Оценяване: 2 т. за намиране на корена $x_1 = 1$; 2 т. за разлагането $(x-1)(x^2 + (p+1)x + p + q + 1) = 0$; 3 т. за намиране на p, q и r.

Задача 11.2. Даден е $\triangle ABC$, вписан в окръжност k с център O. Допирателната към k в точка C пресича лъча $BA^{\rightarrow}$ в точка S. Върху лъча $CA^{\rightarrow}$ след точка A са избрани точки P и Q, за които $AP = PQ$. Да се докаже, че точките P, O, C и S лежат на една окръжност, тогава и само тогава, когато точките Q, B, C и S лежат на една окръжност.



Решение. ($\rightarrow$) Нека точките P, O, C и S лежат на една окръжност k'. Тъй като $OC \perp SC$, то OS е диаметър на k' и ако M е средата на AB, то $OM \perp AB$ и следователно $M \in k'$. Тогава $\sphericalangle SMP = \sphericalangle SCP$ и понеже PM е средна отсечка в $\triangle QBA$, то $\sphericalangle SMP = \sphericalangle SBQ$. Тогава $\sphericalangle SCQ = \sphericalangle SBQ$, което означава, че точките Q, B, C и S лежат на една окръжност.

($\leftarrow$) Обратно, ако точките Q, B, C и S лежат на една окръжност, то $\sphericalangle SCQ = \sphericalangle SBQ$ и понеже $\sphericalangle SBQ = \sphericalangle SMP$, то точките S, P, M и C лежат на една окръжност k'. Но $\sphericalangle OMS = \sphericalangle OCS = 90^\circ$, т.е. k' е с диаметър SO и следователно P, O, C и S лежат на една окръжност.

Оценяване: 2 т. за разглеждане на точката M и доказване, че тя лежи на описаната около $POCS$ окръжност; 5 т. за довършване на решението.

Задача 11.3. Да се намерят всички естествени числа m и n, за които

$$n = m^{\varphi(n)} - 1.$$

(За всяко естествено число n с $\varphi(n)$ се означава броя на естествените числа, по-малки или равни на n, които са взаимно прости с n.)

Решение. Ако $n = 1$, то $m = 2$. Нека $n > 1$. От условието $n = m^{\varphi(n)} - 1$ следва, че $(m, n) = 1$. Нека $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ е каноничното разлагане на n, като без ограничение $p_1^{\alpha_1} < p_2^{\alpha_2} < \dots < p_k^{\alpha_k}$.

Случай 1. Нека $k \geq 2$. За $t = p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ имаме

$$m^{\varphi(n)} - 1 = (m^{\varphi(t)} - 1)M,$$

където $M > m^{\varphi(t)}$. Тъй като t дели $m^{\varphi(t)} - 1$, то $M \leq p_1^{\alpha_1}$, което е противоречие поради $p_1^{\alpha_1} < t < m^{\varphi(t)} - 1 < M \leq p_1^{\alpha_1}$.

Случай 2. Нека $k = 1$, т.е. $n = p^\alpha$ като $\alpha \geq 2$. Тогава $\varphi(n) = p^{\alpha-1}(p-1)$ и за $t = p^{\alpha-2}(p-1)$ имаме

$$m^{\varphi(n)} - 1 = (m^t - 1)M,$$

където $M > m^t$. Понеже $p^{\alpha-1}$ дели $m^t - 1$, то $M \leq p$ и както в случай 1. получаваме противоречие.

Случай 3. Нека $n = p$ е просто число. Тогава $\varphi(n) = \varphi(p) = p - 1$. Ако $p = 2$, то $m = 3$. Ако $p > 2$, то $p - 1 = 2s$. Сега от равенството $p = (m^s - 1)(m^s + 1)$ следва, че $m^s - 1 = 1$, т.е. $s = 1$ и $m = 2$. Това означава, че $p = 3$.

Следователно търсените стойности са $n = 1, m = 2$, $n = 2, m = 3$ и $n = 3, m = 2$.

Оценяване: по 2 т. за всеки от трите случая; 1 т. за получаване на отговорите.

Задача 11.4. Нека M е множество от естествени числа, всяко от които има 2013 цифри и не съдържа 0 в десетичния си запис. Две числа от M ще наричаме *съседни*, ако цифрите им съвпадат в поне един разряд. Да се определи максималният брой елементи на M, ако измежду всеки 9 числа от M можем да изберем 3, всеки две от които са *съседни*.

Решение. Нека M е множеството от всички естествени числа с 2013 цифри, като на първите 2012 позиции може да стои всяка от цифрите $1, 2, \dots, 9$, а на последната позиция може да стоят само цифрите $1, 2, 3, 4$. Тогава $|M| = 4.9^{2012}$. От принципа на Дирихле следва, че измежду произволни 9 числа от M поне три имат една и съща последна цифра, което означава, че всеки две от тези три числа са *съседни*. Следователно $|M| \geq 4.9^{2012}$.

Ще докажем, че ако M е множество, за което $|M| > 4.9^{2012}$, то можем да изберем 9 числа, между които няма три, всеки две от които са съседни. Нека N е множеството от всички числа с 2013 цифри, като $|N| = 9^{2013}$. Да подредим цифрите $1, 2, \ldots, 9$ по окръжност по посока на часовниковата стрелка. Ще казваме, че 2 е *след* 1, 3 е *след* 2 и т.н. 1 е *след* 9. За две 2013 цифрени числа a и b казваме, че a е след b, ако всяка цифра на a е след съответната цифра на b. Множеството N може да се разбие на 9^{2012} подмножества $N_1, N_2, \ldots, N_{9^{2012}}$ от по 9 елемента, като във всяко подмножество 9-те числа са едно след друго.

Тъй като $|M| > 4.9^{2012}$, то можем да изберем 5 елемента от едно от множествата N_i. От останалите елементи на M можем да изберем 4 елемента от едно и също множество N_j. От всеки три от така избраните 9 елемента има два, които са в едно от множествата N_i или N_j. Това означава, че тези два елемента не са съседни.

Следователно $|M| \leq 4.9^{2012}$, т.е. $|M| = 4.9^{2012}$.

Оценяване: 1 т. за верен отговор; 2 т. за пример; 4 т. за неравенството $|M| \leq 4.9^{2012}$.

Задача 12.1. Да се реши в цели числа уравнението

$$x^3 = (x - y)(3xy + 1).$$

Първо решение. Полагаме $x = y + z$ и след заместване в уравнението получаваме (*) $z(z^2 - 1) = (-y)^3$. Ако $z > 1$, то $-y > 0$. Тъй като числата z и $z^2 - 1$ са взаимно прости, следва, че $z = a^3$ и $z^2 - 1 = b^3$, където $a, b \in \mathbb{N}$. Оттук $(a^2)^3 - b^2 = 1$, което е невъзможно (докажете). Ако $z < -1$, полагаме $t = -z > 1$ и (*) приема вида $t(t^2 - 1) = y^3$, което според доказаното по-горе няма решение. Следователно $z = 0, \pm 1, y = 0$ и получаваме, че решенията на даденото уравнение са $(x, y) = (0, 0), (1, 0), (-1, 0)$.

Второ решение. Нека $x \neq 0, x \neq y$. Тъй като числата x и $3xy + 1$ са взаимно прости следва, че x дели $x - y$, т.е. x дели y. Полагаме $x = ky$, където $k \in \mathbb{Z}$. Заместваме в даденото уравнение и получаваме $(1 - k)(3ky^2 + 1) = x^2$. Ако $k > 1$ или $k < 0$, дясната страна е отрицателна и горното равенство е невъзможно. При $k = 0, 1$ намираме решенията от по-горе.

Оценяване:

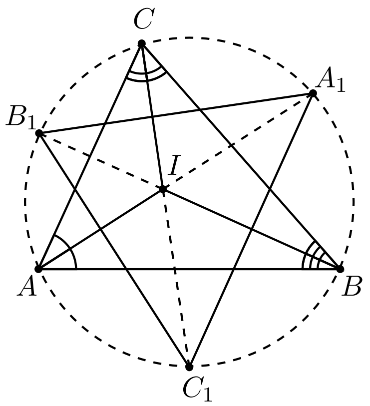
Първо решение. 1 т. за свеждане на уравнението до (*), 3 т. за отхвърляне на случая $z > 1$, 2 т. за отхвърляне на случая $z < -1$ и 1 т. за намиране на решенията.

Второ решение. 2 т. за доказателство, че x дели y, по 2 т. за отхвърляне на случаите $k > 1$ и $k > 0$ и 1 т. за намиране на решенията.

Задача 12.2. Нека I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност и A_1, B_1, C_1 са центровете на оръжностите, описани около $\triangle BIC, \triangle CIA$ и $\triangle AIB$. Да се докаже, че:

а) правите AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка;

б) $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{R}{2r}$, където r и R са радиусите на вписаната и описаната окръжност на $\triangle ABC$.



Решение. а) Имаме $\sphericalangle BIC_1 = \frac{180° - \sphericalangle BC_1I}{2} = \frac{180° - 2\sphericalangle BAI}{2} = \frac{180° - \sphericalangle BAC}{2} = \sphericalangle IBC + \sphericalangle BCI$. Следователно точките C, I и C_1 лежат на една права. Аналогично и правите AA_1 и BB_1 минават през I.

б) Тъй като $\sphericalangle BC_1I = 2\sphericalangle BAI = \sphericalangle BAC$, то C_1 лежи върху описаната около $\triangle ABC$ окръжност и е среда на дъгата $\widehat{AB}$; аналогично за A_1 и B_1. Тогава

$$\sphericalangle A_1BC_1 = \sphericalangle ABC_1 + \sphericalangle CBA + \sphericalangle A_1BC = \frac{\sphericalangle C}{2} + \sphericalangle B + \frac{\sphericalangle A}{2} = 90° + \frac{\sphericalangle B}{2}$$

и от синусовата теорема получаваме, че $A_1C_1 = 2R\cos\frac{B}{2}$. Аналогично $B_1C_1 = 2R\cos\frac{A}{2}$. Тъй като $\sphericalangle A_1C_1B_1 = 90° - \frac{\sphericalangle C}{2}$, следва, че

$$S_{A_1B_1C_1} = 2R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Сега исканото равенство следва от известната формула

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

и аналогичните за другите ъгли, Хероновата формула и $abc = 4RS, S = pr$.

Оценяване: а) 2 т.; б) 3 т. за формулата за $S_{A_1B_1C_1}$ и 2 т. за довършване на решението.

Задача 12.3. Числата $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{5}$ се заменят със сумата и произведението им. За новите числа $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{25}$ се прилага същата операция и т.н. Да се докаже, че във всеки момент числата са по-малки от $\frac{1}{2}$.

Решение. Нека $a_1 = b_1 = \dfrac{1}{5}$, $a_{n+1} = a_n + b_n$ и $b_{n+1} = a_n b_n$ при $n \geq 1$. По индукция ще докажем, че $a_n < \dfrac{12}{25}$ и $b_n \leq \dfrac{1}{25.2^{n-2}}$ при $n \geq 2$. За $n = 2$ това е вярно. Тогава

$$a_{n+1} = a_2 + b_2 + \cdots + b_n \leq \frac{2}{5} + \frac{1}{25}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) < \frac{2}{5} + \frac{2}{25} = \frac{12}{25}$$

и $b_{n+1} = a_n b_n < \dfrac{b_n}{2} = \dfrac{1}{25.2^{n-1}}$.

Забележка. Числото $\dfrac{12}{25} = 0,48$ е „близко“ до $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,469\ldots$

<u>**Оценяване:**</u> 3 т. за работещи оценки и 4 т. доказателство.

Задача 12.4. Нека P е полином от 2013 степен с реални коефициенти такъв, че за произволни числа $x, y, z \in \mathbb{R}$, за които $P(x) + P(y) + P(z) = 0$, следва, че

$$P(x^3) + P(y^3) + P(z^3) = 3P(x)P(y)P(z).$$

Да се докаже, че:

а) $P(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$;

б) P е нечетна функция.

Решение. а) Нека $P(\alpha) = 0$ за някое $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогава $3P(\alpha^3) = 3P^3(\alpha) = 0$ и по индукция следва, че $P(\alpha^{3^n}) = 0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Понеже P има краен брой нули (най-много 2013), то $\alpha = 0$ или $|\alpha| = 1$, т.е. $\alpha = \pm 1$.

б) Тъй като P е от нечетна степен, то $P(\alpha) = 0$ за някое $\alpha \in \mathbb{R}$. От а) следва, че $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$ и значи $\alpha^3 = \alpha$. За всяко $x \in \mathbb{R}$ можем да изберем $y \in \mathbb{R}$ така, че $P(x) = -P(y)$. При $z = \alpha$ следва, че $P(x^3) = -P(y^3)$. Пак по индукция получаваме $P(x^{3^n}) = -P(y^{3^n})$. При $x > 1$ имаме $\lim\limits_{n\to\infty} x^{3^n} = \infty$. В частност, $|y| > 1$. Понеже $\lim\limits_{|t|\to\infty} P(t)/t^3 \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x/y)^{3^n} = -1$. Значи $x = -y$, т.е. $P(x) = -P(-x)$ при $x > 1$, а оттам и за всяко x.

Забележка. Заменяйки 2013 с произволно нечетно число $2n - 1$, може да се докаже, че $P(x) = x^{2n-1}$ или $P(x) = -x^{2n-1}$.

<u>**Оценяване:**</u> а) 2 т.; б) 2 т. за $P(x) = -P(y) \Rightarrow P(x^{3^n}) = -P(y^{3^n})$ (1 т. при $n = 1$) и 3 т. за довършване на решението.

Задачите са предложени от:

Ангел Гушев – 9.1; Динко Раднев – 9.2; Петър Бойваленков – 9.3, 9.4; Иван Ланджев – 10.1, 10.4; Стоян Боев – 10.2, 10.3; Емил Колев – 11.1, 11.2; Александър Иванов – 11.3, 11.4; Олег Мушкаров – 12.1, 12.2; Николай Николов – 12.3, 12.4.