

6.3 Еквивалентни неравенства

1 След като направите необходимите пресмятания, запишете еквивалентни ли са неравенствата.

(А) $x < -9$ и $2x < -18$	$2x < -18 \quad :2 \Leftrightarrow x < -9$	ДА
(Б) $2y + 6 > 2y$ и $0 \cdot y > -8$		
(В) $-5x > 15$ и $5x > -15$		
(Г) $0 \cdot z \geq 0$ и $-5(z - 3) \leq 15 - 5z$		

2 Решете неравенството.

Неравенство	Етапи на решение
$\frac{2x-3}{2} - \frac{x-1}{5} > \frac{7x-1}{10}$	Освободете от знаменателите, като: <ul style="list-style-type: none"> • намерите НОК; • умножете всеки член с НОК; • съкратите. Редът със скобите не се пропуска!
	Представете изразите от двете страни в нормален вид чрез разкриване на скобите и привеждане.
	Прехвърлете събираемите, съдържащи x , от едната страна, а константите от другата страна.
	Представете неравенството във вида: $x < b$ или $x > b$ $x \geq b$ или $x \leq b$

3 Решете неравенствата и напишете извод за неравенствата, записани на един ред – еквивалентни ли са или не.

А) $\frac{2x-5}{2} - \frac{3x-1}{3} > 1$	И	Б) $\frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} - 12 \right) > \frac{1}{2} \left(\frac{x}{3} - 4 \right)$	Извод:
В) $2(0,5x-1)(x+2) - \frac{x^2}{2} > \frac{(x-2)(x+2)}{2}$	И	Г) $\frac{x-1}{6} - \frac{x^2-1}{2} > \frac{x(1-3x)+1}{6}$	

6.4 Упражнение

1 Кои двойки уравнения са еквивалентни?

а) $(x-3)^2 > (x-3)(x+3)$ и $-x > -3$

.....

.....

б) $x(2x-2) \leq 2x(x-1)$ и $\frac{x-3}{2} + \frac{x}{-2} > 3$

.....

.....

в) $\frac{3}{4}(4x-4) > (2x+1)^2 - (2x+3)(2x-3)$ и

$$\frac{x+3}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} < \frac{2x(x-2)-28}{6}$$

.....

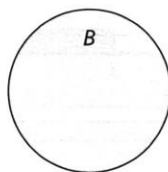
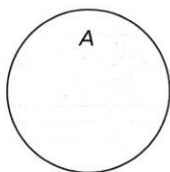
.....

.....

.....

2 Дадени са неравенствата

$$x(x+1) - (x-2)^2 > 4x-9 \quad \text{и} \quad \frac{5-x}{2} \leq 5.$$



а) В кръгчето А запишете целите отрицателни решения на първото неравенство.

б) В кръгчето В запишете целите отрицателни решения на второто неравенство.

в) Определете $A \cap B$.

г) Намерете най-голямото цяло отрицателно число, което е решение и на двете неравенства.

.....

.....

.....

.....

3 Намерете средноаритметичното на целите неположителни решения на неравенствата.

а) $x + \frac{x+1}{2} - (x-1)(x+1) > x(2-x) - 5$

.....

.....

б) $(2x+3)(2x-3) - \frac{2x-7}{2} < 4x^2 - 3,5$

.....

.....

4 Намерете стойностите на y , за които стойностите на израза $(y-3)^3 - (y+3)(y^2 - 3y + 9)$ са не по-големи от стойностите на израза $9y(2-y)$.

.....

.....

.....

.....

.....

5 Намерете най-малкото цяло число, което е решение на неравенствата.

а) $\frac{2x-3}{2} > 3,5$

.....

.....

б) $\frac{x-5x^2-2}{-5} < 1+x^2$

.....

.....

в) $\frac{x}{2} + \frac{(x-3)^2}{3} < \frac{x^2-1,5}{3}$

.....

.....

6.5 Представяне на решенията на линейно неравенство с числови интервали и графично върху числова ос

1 В графата срещу твърдението отговорете с „ДА“, ако е вярно, и с „НЕ“, ако не е вярно.

а) $3,2 \in (-3; 4)$	ДА	г) $4,8 \in (4,8; 9)$	ж) $-6 \in [-6,9; 6]$
б) $-6 \in (-\infty; 6,6)$		д) $5,5 \in [5,5; +\infty)$	з) $-7 \in (-5,9; 6]$
в) $4 \in (6; +\infty)$		е) $-6 \in [-5,9; 6)$	и) $5 \in (5; 15]$

2 Кои от числата $-4,2; -3; -1,8; -0,6; 0; 0,2; 2; 6; 9;$

$10\frac{1}{5}$ принадлежат на интервала:

- а) $(-\infty; -4,1)$
 б) $(-3; 0]$
 в) $(0; +\infty)$
 г) $[0; +\infty)$
 д) $[0,2; 10)$

3 Запишете с неравенства интервалите.

- а) $(-\infty; -2,4)$
 б) $(-5; 5]$
 в) $[0,4; +\infty)$
 г) $(7; +\infty)$
 д) $[0,22; 10]$

4 Запишете с интервали неравенствата.

- а) $-6 < x < 7$
 б) $-3,5 < x \leq 6$
 в) $0,6 \leq x < 5$
 г) $-3,5 \leq x \leq 6$
 д) $x > 0$

6 Изобразете върху числова ос интервалите.

а) $(-\infty; -4)$



б) $(-3; 0]$

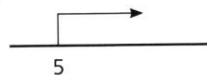


в) $[0; +\infty)$

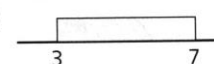


7 Запишете интервалите, изобразени на фигурите.

а)



б)



5 Решете неравенствата, записани в първата колона. Запишете решенията с интервали във втората колона, изобразете решенията в третата колона. В четвъртата колона запишете кои от дадените числа принадлежат на интервала от втората колона.

Неравенство	Интервал	Графично изображение на решенията	Числа $-4; -1; 0; 2; 5; 6; 9$
а) $2(3x - 7) \geq 4(x - 4)$			
б) $1 - \frac{x-1}{2} < 2$			
в) $(x - 5)^2 \leq (x - 5)(x + 5)$			

6.6 Неравенства, свеждащи се до линейни

- 1 Намерете средноаритметичното на целите положителни решения на неравенствата.

а) $(x-1)^2 - 2 > (6-x)(-6-x) + 3x$

.....

Изнесете знак минус от втората скоба.
 $(6-x)(-6-x) = -(6-x)(6+x)$

.....

б) $(x^2-1)(x^2+1) - 11 < (x^2+2)^2 - 4x(1+x)$

.....

- 3 Решете неравенствата, като ги сведете до линейни, и намерете най-голямото цяло число, което е решение на неравенството.

а) $(-3x-2)^2 - (1-3x)(-3x-1) \leq 5(1-x)$

.....

б) $(x-1)(x^2+x+1) - 2(2-x) < (x+2)(x^2-2x+4)$

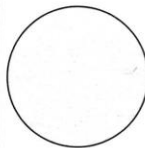
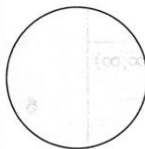
.....

- 2 Решете неравенствата, като ги сведете до линейни. Срещу неравенствата от първата колона, в кръгчето, запишете номера на еквивалентното неравенство от втората колона.

(А) $\frac{x-3}{3} - \frac{2x}{-3} > -1$

(Б) $\left(\frac{-x-1}{2}\right)^2 - \frac{x-1}{2} > \frac{x(x+1)}{4} + 1$

(В) $\frac{x(2x-1)}{-2} \geq \frac{x}{2} - x^2$



1) $(x+3)(3-x) - 4(2+x) > -(x+2)^2$
 $0x > -5 \Rightarrow$ Всяко число е решение.

2) $x(x+10) + 1 > (-x-1)^2$

3) $(x^2-3)(-x^2-3) - x > 10 - x^4$

6.7 Упражнение

- 1 Запишете интервала, изобразен върху числовата ос.



- 2 В таблицата са дадени неравенства, а възможните им решения са представени във втората колона с числови интервали. В първата колона на таблицата за отговори запишете буквата на неравенството и срещу нея, във втората колона, запишете номера на съответния интервал с решенията.

(А) $(x-2)(x-3) > (x-3)(x+3)$	(1) $x \in \emptyset$
(Б) $\frac{x-2}{2} + \frac{x-1}{-2} > 1$	(2) $x < 3$
(В) $\frac{10(x-1)}{3} + \frac{x}{-0,3} < 1$	(3) $x \leq 0$
(Г) $(x-7)(x+1) \geq x^2 - 5x - 7$	(4) $x \in (-\infty; \infty)$

Таблица за отговори	
(А)	
(Б)	
(В)	
(Г)	

- 3 Дадено е неравенството $\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{x^2}{-4} \geq \frac{x-2}{3} \cdot \frac{x+2}{4}$.
Намерете:

- а) най-малкото цяло число, което е решение на неравенството;

- б) най-голямото цяло число, което не е решение на неравенството.

- 4 Намерете стойностите на y , за които:

- а) изразът $3(y-3)$ е не по-голям от -6 ;

- б) изразът $-2(4-3y)$ е не по-малък от 10 .

- 5 Дадено е неравенството $(x-1)^3 - x(x^2-3x) > 5$.
Намерете произведението от целите положителни числа, които не са решение на неравенството.

- 6 Дадени са неравенствата $(-x-1)^2 > x^2 + 5$ и $2(x-1) < 8$.
Намерете целите числа, които са решение **И** на двете неравенства.

6.8 Приложение на линейните неравенства

- 1 Ако към произведението на едно число с 5 се прибави 8, ще се получи число, не по-голямо от 38. Намерете всички естествени числа, които отговарят на това условие.

.....

- 2 Намерете стойностите на x , за които разликата на изразите $A = x(x - 3)$ и $B = (x + 2)^2$ е не по-малка от произведението на $-1\frac{1}{7}$ и -21 .

.....

- 3 Дължината на правоъгълник е с 3 cm по-голяма от ширината. Намерете двойките естествени числа, които могат да бъдат измерения на страните му, ако периметърът му не надвишава 34 cm.

С x означете cm в една част. Така $a = 4x, b = 4x, c = 5x$.

.....

- 4 Страните на правоъгълен триъгълник се отнасят както 3 : 4 : 5. Колко най-много може да е дълга хипотенузата, така че периметърът на триъгълника да не е по-голям от 36 cm.

.....

- 5 Турист изкачва стръмна еко пътека със скорост 4 km/h, а слиза по същия път със скорост 6 km/h. На какво разстояние от началото на пътеката най-много може да се отдалечи, ако разполага най-много с 3 h за разходката?

	v	t	$s = vt$
Изкачване			
Слизане			



С x означете изминатия път в km.

.....

- 6 В текстилна фабрика една бригада може да изпълни поръчка за 6 дни. Друга бригада може да изпълни същата поръчка за 4 дни. Намерете за колко дни най-много може да се свърши $\frac{5}{6}$ от работата, ако двете бригади работят заедно.

	Времето – сами	Цялата работа	Производителност
I бригада			
II бригада			

	Производителност	Времето – заедно	Свършена работа
I бригада			
II бригада			

.....

6.9 Упражнение

1 Решете неравенството $x + \frac{2x-1}{-5} \geq -\frac{5x+7}{-10}$.
Намерете:

а) най-малкото цяло число, решение на неравенството;

.....

б) средноаритметичното число на всички цели неотрицателни числа, които не са решение на неравенството.

.....

2 Даден е изразът $A = \frac{x-3}{-0,5}$. Намерете:

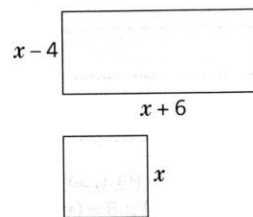
а) всички стойности на x , за които стойността на A не надвишава стойността на израза $-\frac{3x-10}{2}$. Запишете решенията с интервал.

.....

б) всички цели, положителни стойности на x , за които изразът A е неотрицателен.

.....

3 Дължината на правоъгълник е с 6 cm по-голяма от страната на квадрат, ширината му – с 4 cm по-малка. Кое най-малко цяло число може да бъде дължината на страната на квадрата, за да бъде лицето му по-малко от лицето на правоъгълника?



.....

4 Мария разполага с 10 лв., с които иска да си купи няколко химикалки и два пъти повече тетрадки. Колко химикалки и колко тетрадки може да си купи, ако цената на една химикалка е 80 ст., а на една тетрадка е 60 ст.? Запишете всички възможности.

.....

5 Туристическа агенция организира разходки с катер по река. Скоростта на катера в спокойна вода е 18 km/h, а скоростта на течението е 3 km/h. На какво най-голямо разстояние може да се отдалечи катерът за два часа?

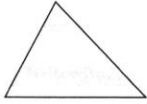
	v	t	$s = vt$
По течението			x
Срещу течението			x

С x означете разстоянието $x > 0$.

.....

6.10 Неравенства между страни и ъгли в триъгълник

- 1 В $\triangle ABC$ $AB = 12$ cm, $BC = 13$ cm и $AC = 5$ cm. Определете най-големия и най-малкия ъгъл в $\triangle ABC$.



- 2 Ако за страните a, b, c в един триъгълник е изпълнено $a > b > c$, то може ли:

- а) $\sphericalangle \gamma$ да е тъп?
- б) $\sphericalangle \beta$ да е прав?
- в) $\sphericalangle \alpha$ да е тъп?



- 3 Сравнете AB и AC в равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$), ако един от ъглите на триъгълника е равен на:

а) 50°

б) 60°

в) 120°

- 4 В $\triangle ABC$ за страните е в сила неравенството $BC < AC < AB$. Оградете възможното отношение на мерките на ъглите.

а) $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 3$

б) $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 1$

в) $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 2 : 1$

г) $\alpha : \beta : \gamma = 4 : 4 : 2$

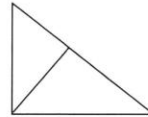
- 5 Сравнете страните на $\triangle ABC$, ако:

а) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 50^\circ$

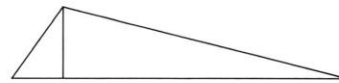
б) $\sphericalangle A = 40^\circ$ и $\sphericalangle C : \sphericalangle B = 3 : 4$

в) $\sphericalangle B = 54^\circ$ и $\sphericalangle A = 2 \sphericalangle C$

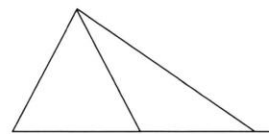
- 6 В $\triangle ABC$ с ъгли $\beta = 35^\circ$ и $\gamma = 55^\circ$ е построена ъглополовящата AL . Направете необходимите означения на чертежа. Подредете по големина страните на $\triangle ABC$, $\triangle ABL$ и $\triangle ALC$.



- 7 В $\triangle ABC$ $\alpha : \beta : \gamma = 5 : 2 : 11$ и CD е височина. Направете необходимите означения на чертежа. Подредете по големина страните на $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ и $\triangle DBC$.



- 8 Страната AB е основа на равнобедрения $\triangle ABC$. Точката P лежи на правата AB , като т. B е между A и P . Направете необходимите означения на чертежа. Докажете, че $PC > AC$.



Разгледайте $\triangle BPC$.

6.11 Неравенство на триъгълника

- 1 Кои от тройките числа могат да бъдат дължини на страни на триъгълник?
- а) 5 cm, 5 cm и 10 cm
 б) 4,5 dm, 5,5 dm и 11 cm
 в) 4 cm, 6 cm и 10 cm
 г) 3 cm, 4 cm и 5 cm

- 2 Съществува ли триъгълник със страна 10,5 cm и периметър, равен на 20 cm?
-

- 3 Намерете дължината на бедрото на равнобедрен триъгълник със страни 4 cm и 9 cm.
-

- 4 Две от страните на равнобедрен триъгълник са 4 cm и 8 cm. Намерете периметъра на триъгълника.
-

- 5 Периметърът на равнобедрен триъгълник е 1,5 dm, а едната му страна е с 3 cm по-голяма от другата. Намерете страните на триъгълника.



Разгледайте два случая.

С x означете бедрото

С x означете основата

- 6 Дължините на страните на един триъгълник са 7 cm, 8 cm и x cm. Какви неравенства трябва да удовлетворява третата страна?
-

- 7 Две от страните на триъгълник са 4 cm и 6 cm. Намерете третата.
-

- 8 Две от страните на триъгълник имат дължини 3 cm и 5 cm. Дължината на третата му страна може да е:

- а) 5 cm
 б) 8 cm
 в) 9 cm
 г) 2 cm

- 9 Разликата на дължините на две от страните на $\triangle ABC$ е 8 cm. Дължината на третата страна не може да е:

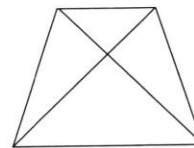
- а) 10 cm
-

- б) 18 cm
-

- в) 14 cm
-

- г) 8 cm
-

- 10 В трапеца $ABCD$ диагоналите AC и BD се пресичат в т. O . Направете необходимите означения на чертежа. Докажете, че $AC + BD > AB + DC$.



Разгледайте $\triangle ABO$ и $\triangle DOC$. За всеки от тях запишете неравенството на триъгълника. Съберете почленно разписаните неравенства.

.....

6.12 Неравенства – тест

За всяка задача от 1 до 5 включително има само един верен отговор. Посочете верния отговор.

- 1 Ако $m - n > 0$, то:
 А) $m = n$ Б) $n > m$ В) $m > n$ Г) $m \geq n$
- 2 Стойностите на x от интервала $x \in (-\infty; 5]$ са решения на неравенството:
 А) $-x \geq 5$ Б) $-x \leq -5$ В) $-x \geq -5$ Г) $-x < 5$.
- 3 Решенията на неравенството $3(x - 2) > 5(x - 2)$ са числата от интервала:
 А) $(2; +\infty)$ Б) $(-\infty; -2]$ В) $(-\infty; -2)$ Г) $(-\infty; 2]$
- 4 Не е решение на неравенството $4(x - 2) \geq -8$ числото:
 А) 1 Б) 0 В) 4,5 Г) -4
- 5 Най-малкото цяло число, решение на $(-x - 1)^2 > (-x - 3)(3 - x)$, е:
 А) -5 Б) 5 В) -6 Г) -4

За всяка задача от 6 до 9 включително запишете само получените отговори.

- 6 За кои стойности на x числената стойност на израза $\frac{2x-3}{2}$ е не по-голяма от $\frac{x-2}{-3}$?
- 7 Срещу буквата на неравенството запишете цифрата на съответстващия интервал, съдържащ решенията му.

Неравенства	Интервали	
(А) $(3 + x)(3x - 1) > 3(x^2 + 2x - 1)$	(1) $x \in (-\infty; 2]$	(А)
(Б) $x(x^2 - 6x + 5) \geq (x - 2)^3 - 6$	(2) $x \in (-5; +\infty)$	(Б)
(В) $(-x - 1)^2 > (-x - 3)(3 - x)$	(3) $x \in (0; +\infty)$	(В)
(Г) $(-x - 1)(1 - x) > x(x + 2) - 11$	(4) $x \in (-\infty; 5)$	(Г)

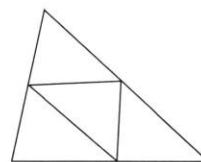
Задачи от 1 до 5 включително се оценяват по 2 точки, задачи от 6 до 9 – по 3 точки, а задача 10 – по 8 точки. Общо 30 точки.

0–5 т. – Слаб (2); 6–9 т. – Среден (3); 10–17 т. – Добър (4); 18–25 т. – Мн.добър (5); 26–30 т. – Отличен (6)

- 8 Средноаритметичното число от целите отрицателни решения на неравенството $1 - \frac{x-3}{-2} < x+3$ е:
- 9 В $\triangle ABC$ $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ACB$ се отнасят съответно както 2 : 3 : 5. Страните на $\triangle ABC$ удовлетворяват двойното неравенство

За задача 10 запишете решението с необходимите обосновки.

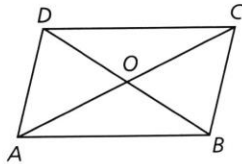
- 10 Върху страните на $\triangle ABC$ са взети точки, като $P \in AB$, $Q \in CB$ и $R \in AC$. Направете нужните означения. Докажете, че $P_{\triangle PQR} < P_{\triangle ABC}$.



7 Успоредник

7.1 Успоредник. Свойства

- 1 Даден е успоредникът $ABCD$, диагоналите $AC \times BD = t$. O . Докажете, че:



- а) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$;

.....
.....
.....
.....

- б) $\triangle AOD \cong \triangle COB$.

.....
.....
.....
.....

- 2 Намерете ъглите на успоредник, ако:

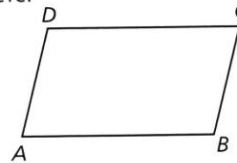
- а) градусните мерки на два от тях се отнасят както 2 : 7;

.....
.....
.....

- б) разликата на два от тях е 110° .

.....
.....
.....

- 3 За успоредника $ABCD$ е дадено, че $BC = 6$ cm и AB е 3 пъти по-голяма от дължината на BC . Намерете:



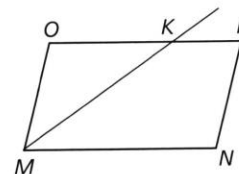
- а) периметъра на успоредника;

.....
.....
.....

- б) лицето на успоредника, ако $\sphericalangle A = 30^\circ$.

.....
.....
.....

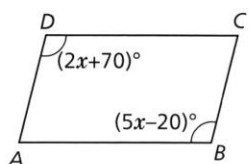
- 4 Ъглополовящата на $\sphericalangle MMQ$ на успоредника $MNPQ$ пресича страната PQ в точка K . Ако $KQ = 4$ cm и $KP = 2$ cm, намерете периметъра на успоредника.



.....
.....
.....

7.2 Признаци за успоредник

- 1 На чертежа е даден успоредникът $ABCD$.
Намерете ъглите на успоредника.



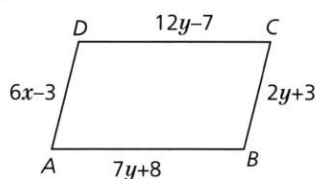
.....

.....

.....

.....

- 2 Каква трябва да е стойността на x , за да бъде четириъгълникът $ABCD$ успоредник?



.....

.....

.....

.....

.....

- 3 В успоредника $KLMN$ ъглополовящата при върха K пресича правата MN в точка Q .
Докажете, че $\triangle KQN$ е равнобедрен.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 4 Даден е успоредник $ABCD$, в който $\angle BAD < 90^\circ$, $AB > AD$, $AC \times BD = t$. O и $DP \perp AC$ ($P \in AC$). Намерете дължината на отсечката OP , ако $\angle ADP = 45^\circ$, $AC = 16$ cm и $DP = 4$ cm.

.....

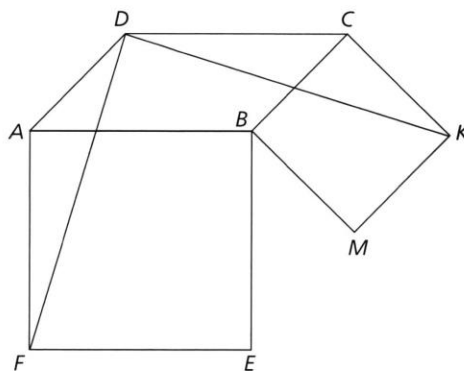
.....

.....

.....

.....

- 5 На чертежа е даден успоредника $ABCD$, като външно от него са построени квадратите $ABEF$ и $BCKM$. Докажете, че отсечките DK и DF са равни и перпендикулярни.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

7.3 Упражнение

- 1 Даден е успоредникът $MNPQ$. Периметърът на успоредника е 18 cm, а периметърът на $\triangle MNP$ е 14,7 cm. Намерете дължината на диагонала AC .

.....

.....

.....

.....

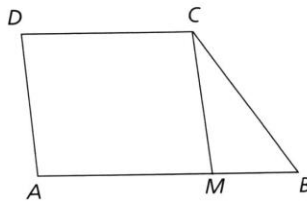
.....

.....

.....

.....

- 2 На чертежа е даден четириъгълникът $ABCD$, като $AB \parallel CD$, $AB = 10$ cm, $CD = 7$ cm и $AD = 4$ cm. Точка M лежи на страната AB и е такава, че $BM = 3$ cm. Намерете дължината на отсечката CM .



.....

.....

.....

.....

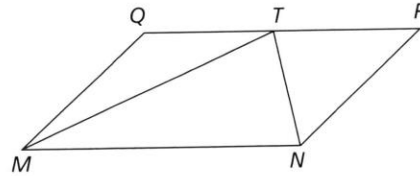
.....

.....

.....

.....

- 3 Точка T е среда на страната PQ на успоредника $MNPQ$ и $MN = 2MQ$.



Докажете, че:

- а) MT и NT са ъглополовящи съответно на $\sphericalangle M$ и $\sphericalangle N$;

.....

.....

.....

.....

.....

- б) $\sphericalangle MTN = 90^\circ$.

.....

.....

.....

.....

.....

- 4 Даден е успоредник. Намерете:

- а) ъглите на успоредника, ако единият от тях е с 40° по-малък от друг;

.....

.....

.....

.....

.....

- б) ъгъла между височините, спуснати от тъпия ъгъл на успоредника, ако острият му ъгъл е $\frac{7}{18}$ от правия ъгъл.

.....

.....

.....

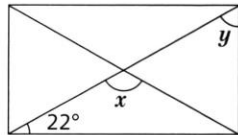
.....

.....

7.4 Правоъгълник

- 1 На чертежите са начертани правоъгълници с означени дадени елементи. Намерете елементите, означени с x и y .

а)

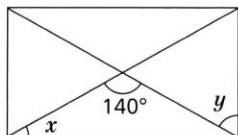


.....

.....

.....

б)

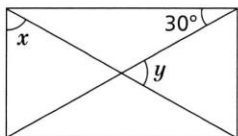


.....

.....

.....

в)

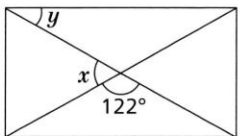


.....

.....

.....

г)

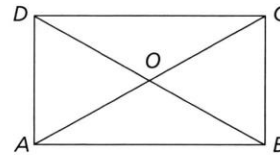


.....

.....

.....

- 2 На чертежа е даден правоъгълник $ABCD$, като точка O е пресечна точка на диагоналите и $\sphericalangle BOC = 60^\circ$. Докажете, че:



- а) $\triangle AOD$ е равностранен;

.....

.....

.....

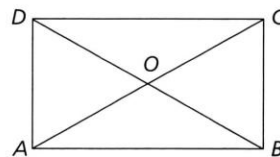
- б) $\sphericalangle ABD = 30^\circ$.

.....

.....

.....

- 3 На чертежа е даден правоъгълник $ABCD$, $AC \times BD = t$. O От точка O са спуснати перпендикуляри към AB и BC , на които петите са съответно точките M и N .



- а) Докажете, че четириъгълникът $MBNO$ е правоъгълник.

.....

.....

.....

- б) Докажете, че $MN = \frac{1}{2} AC$ и $MN \parallel AC$.

.....

.....

.....

- в) Намерете периметъра на правоъгълника $MBNO$, ако периметърът на $ABCD$ е 64 cm.

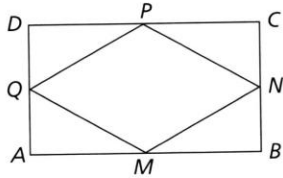
.....

.....

.....

7.5 Упражнение

- 1 Върху страните AB , BC , CD и AD на правоъгълника $ABCD$ са взети съответно средите M , N , P и Q . Докажете, че $MNPQ$ е успоредник.



.....

.....

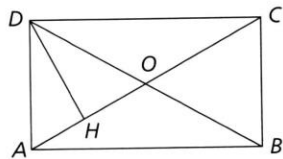
.....

.....

.....

.....

- 2 Пресечната точка на диагоналите на правоъгълника $ABCD$ е точка O . През точка D е спуснат перпендикуляр към диагонала AC и го пресича в точка H , като го дели в отношение $1:3$, считано от т. A .



Намерете:

- а) ъглите между диагоналите на правоъгълника;

- б) BD , ако $BC = 6$ см.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 3 Даден е четириъгълникът $ABCD$, в който $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90^\circ$ и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$.

- а) Докажете, че $ABCD$ е правоъгълник.

.....

.....

.....

.....

.....

- б) Намерете лицето на $ABCD$, ако $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC - 60^\circ$ и $AC = 24$ см.

.....

.....

.....

.....

.....

- 4 Точките M , N и P са среди на страните AB , AD и CD на правоъгълника $ABCD$, а $AB = 24$ см, $BC = 8$ см. Намерете лицето на триъгълника MNP .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

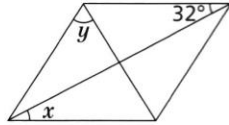
.....

7.6 Ромб

- 1 На чертежите са начертани ромбове с означени дадени елементи. Намерете елементите, означени с x и y .

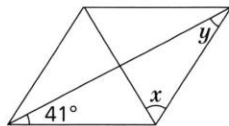
а)

.....



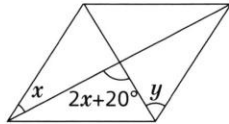
б)

.....



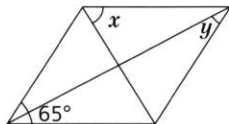
в)

.....



г)

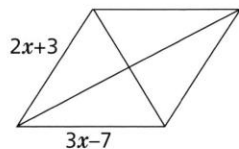
.....



- 2 За какви стойности на неизвестното успоредникът е ромб? Намерете обиколката на ромба.

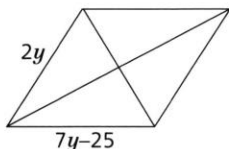
а)

.....



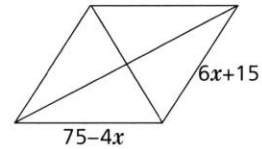
б)

.....



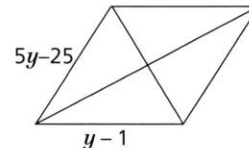
в)

.....



г)

.....



- 3 Даден е ромб. Намерете ъглите на ромба, ако:

а) диагоналят склучва със страна на ромба ъгъл от 55° ;

.....

б) диагоналят на ромба е равен на страната му.

.....

- 4 В ромба $ABCD$ диагоналите се пресичат в т. O , $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ и диагоналят $DB = 7$ cm. Намерете дължината на страната на ромба.

.....

- 5 Периметърът на ромба $MNPQ$ е 60 cm, а диагоналят NQ е с дължина 15 cm. Определете вида на $\triangle MNQ$.

.....

7.7 Упражнение

- 1 Даден е ромб $ABCD$, на който диагоналите се пресичат в точка O . Намерете ъглите на ромба, ако:

а) $\sphericalangle OAB : \sphericalangle OBA = 2 : 7$;

.....

.....

.....

.....

.....

б) $\sphericalangle OAB$ е 5 пъти по-голям от $\sphericalangle OBA$.

.....

.....

.....

.....

.....

- 2 Единият диагонал на ромб е с 8 см по-дълъг от другия. Ако сборът от дължините на диагоналите е 44 см, намерете лицето на ромба.

.....

.....

.....

.....

.....

- 3 В ромба $PQRS$ $\sphericalangle PQR = 150^\circ$. Ако височината SH към страната PQ има дължина 4 см, намерете лицето на ромба.

.....

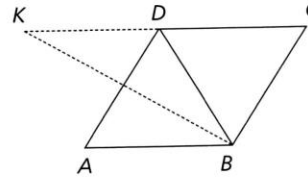
.....

.....

.....

.....

- 4 В ромба $ABCD$ ъглополовящата на $\sphericalangle ABD$ пресича правата CD в т. K (K е външна за CD) и $\sphericalangle BKD = 35^\circ$. Намерете мярката на $\sphericalangle BAD$.



.....

.....

.....

.....

.....

- 5 Намерете ъглите на ромба $ABCD$, ако симетралата на страната AB минава през върха C .

.....

.....

.....

.....

.....

7.8 Квадрат

- 1 Даден е квадрат с дължина на диагонала 12 cm. Намерете лицето на квадрата.

.....

.....

.....

.....

- 2 Периметърът на квадрат е 44 cm. Намерете:

а) лицето на квадрата;

.....

.....

.....

.....

б) разстоянието от пресечната точка на диагоналите до страните на квадрата.

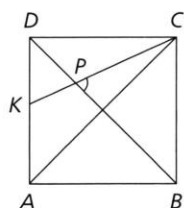
.....

.....

.....

.....

- 3 На чертежа $ABCD$ е квадрат и CK е ъглополовяща на $\sphericalangle DCA$, като $K \in AD$. Диагоналите се пресичат в точка O и $CK \times BD = t \cdot P$. Намерете мярката на $\sphericalangle CPB$.



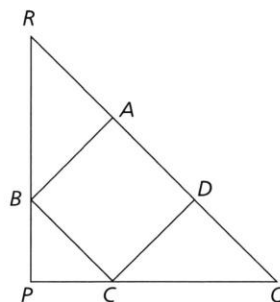
.....

.....

.....

.....

- 4 На фигурата е даден правоъгълен равнобедрен $\triangle PQR$ ($PQ = PR$). В него е вписан квадрат $ABCD$ така, че точките A и D лежат на хипотенузата QR , а точките B и C са съответно от катетите PR и PQ .



Ако периметърът на квадрата $ABCD$ е 40 cm, намерете:

а) дължината на хипотенузата QR ;

.....

.....

.....

.....

б) лицето на $\triangle PQR$.

.....

.....

.....

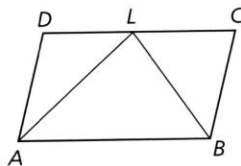
.....

7.9 Успоредник – тест

За всяка задача от 1 до 8 включително има само един верен отговор. Посочете верния отговор.

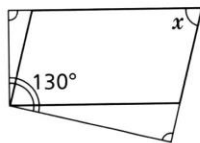
- 1 За успоредник $ABCD$ е дадено, че $AD = DL = LC$. Намерете $\sphericalangle ALB$.

- А) 30°
 Б) 90°
 В) 50°
 Г) 60°



- 2 На чертежа ъгъл x е равен на:

- А) 20°
 Б) 91°
 В) 50°
 Г) 60°



- 3 Даден е успоредникът $ABCD$. AM е ъглополовяща на $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle BAM = 30^\circ$. Кое твърдение **не е вярно**?

- А) $AD = DM$
 Б) $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BAM$
 В) $\sphericalangle BCD = 60^\circ$
 Г) $\sphericalangle ABC = 150^\circ$

- 4 В правоъгълника диагоналят се отнася към по-малката страна както 2 към 1. Тъпият ъгъл между диагоналите е:

- А) 110° Б) 120° В) 130° Г) 150°

- 5 Правоъгълник $ABCD$ има обиколка 76 cm и едната му страна е с 2 cm по-голяма от другата. Лицето на $\triangle ABC$ е:

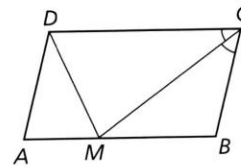
- А) 36 cm^2
 Б) 180 cm^2
 В) 135 cm^2
 Г) 140 cm^2

- 6 Кое твърдение **не винаги** е вярно?

- А) Ако диагоналите на ромб са равни, то той е квадрат.
 Б) Всеки квадрат е ромб.
 В) Ако диагоналите на успоредник са ъглополовящи на ъглите му, то той е ромб.
 Г) Четириъгълник, на който диагоналите са перпендикулярни, е квадрат.

- 7 На чертежа ъглополовящата на $\sphericalangle BCD$ на успоредника $ABCD$ пресича страната AB в точка M така, че $CM = CD$ и $MD = AD$. Мярката на $\sphericalangle BAD$ е равна на:

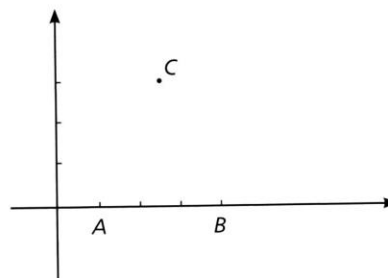
- А) 30°
 Б) 72°
 В) 60°
 Г) 45°



- 8 Лицето на квадрат е 64 cm^2 и е равно на лицето на правоъгълен триъгълник, единият катет на който е равен на страната на квадрата. Дължината на другия катет е:

- А) 4 cm
 Б) 8 cm
 В) 16 cm
 Г) 32 cm

- 9 В правоъгълна координатна система са дадени точките $A(1;0)$, $B(4;0)$ и $C(2;5;3)$. Начертайте три успоредника така, че точките A , B и C да са върхове на всеки един от тях.

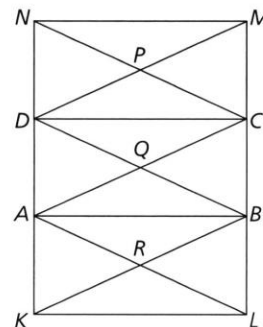


- А) Напишете координатите на четвъртия връх на всеки от трите успоредника.

- Б) Намерете лицата на всеки от получените успоредници.

- 10 Определете вида на всеки от изброените в таблицата четириъгълници и в съответната клетка поставете кръстче, ако четириъгълникът е от съответния вид.

Четириъгълник	Успоредник	Правоъгълник	Ромб	Квадрат	Нито един от посочените
AKLB					
ACMD					
DQCP					
ABMN					
AKBQ					
LBQR					



- 11 Даден е успоредник $PQRT$, за който $PR \perp TQ$, $\angle QPT > 90^\circ$, $TK \perp PQ$ (K лежи на правата PQ) и $PR = 2PK$. Точките S и H лежат съответно на страните RT и QR и са такива, че $RS + RH = PR$. Намерете мярката на $\angle PSH$.

.....

.....

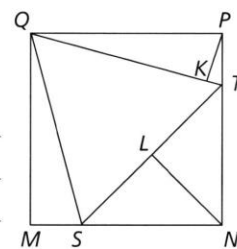
.....

.....

.....

.....

- 12 Даден е квадрат $MNPQ$. Точките S и T са съответно върху страните MN и NP така, че $\triangle QST$ е равностранен, а $NL \perp ST$ ($L \in ST$) и $PK \perp TQ$ ($K \in TQ$). Намерете дължината на отсечката NL в сантиметри, ако $PK = 3$ см.



.....

.....

.....

.....

.....

Задачи от 1 до 8 включително се оценяват по 2 точки, задача 9 – по 3 точки за всяка подточка, разпределени по една за всяка координата на точка или лице – общо 6 точки, задача 10 – по 1 точка за всеки верен отговор на четириъгълник (общо 6 точки), задача 11 – 4 точки, задача 12 – 3 точки. 0–12 т. – Слаб (2); 13–18 т. – Среден (3); 19–24 т. – Добър (4); 25–31 т. – Мн.добър (5); 32–35 т. – Отличен (6)