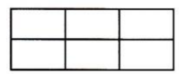
ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ

Ст. Стоев

4. КЛАС

46. Доктор Ох Боли раздал на четири от любимите си животни 2009 чудотворни таблетки с витамини. Носорогът получил една таблетка повече от Крокодила. Хипопотамът получил две таблетки повече от Носорога, а Слончо – две повече от Хипопотама. Колко таблетки с витамини трябва да изяде Слончо?

47. Еми погледна рисунката на Иво и каза: „Тук са нарисувани 7 правоъгълника – един голям и шест малки правоъгълника“. Иво добави: „Тук има и още правоъгълници, различни от тези, които виждаш“. Колко са всички правоъгълници на тази рисунка?



48. Учениците от едно училище, които са 2009 на брой, били построени в редица, след което започнали да се броят на глас по трима: 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... След като приключили това броене, незнайно по каква причина решили да се преброят по четирима: 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, ... Колко от учениците са казали 1 и при двете преброявания?

49. За Нова година Ани и Боби получили много подаръци, сред които и един общ подарък – сборник със задачи по математика. До края на месец март Ани решила 232 задачи от този сборник, а Боби – 199. Боби съобразил, че до края на сборника му остава да реши 4 пъти повече задачи, отколкото ѝ остават на Ани. Колко са всички задачи в този сборник?

5. КЛАС

50. Един ден Мечо Пух и приятелят му Прасчо посетили горската сладкарница. И двамата си харесали една и съща торта и решили да си я поделят. Пух разрязал тортата по братски, но Прасчо се оплакал, че парчето му е много, много малко. Тогава Мечо Пух му дал една трета от своята част и така парчето торта на Прасчо се увеличило три пъти. Каква част от тортата е заделил първоначално Пух за себе си и каква част – за Прасчо?

51. В триъгълника ABC точка M е среда на страната AB, а точка N е среда на отсечката CM. Построена е височината CD от върха C към страната AB, като точка M е между точките A и D. Нека правата BN пресича правата AC в точка P. Ако $CB = 13$ см, $CD = 12$ см, $AC = 20$ см и лицето на триъгълника BCN е равно на 31,5 кв. см, да се намери:

а) лицето и обиколката на триъгълника ABC;

б) дължината на отсечката CP и лицето на четириъгълника $AMNP$.

52. Четири различни прости числа имат сбор 226. Едното от числата е записано с две цифри и те са еднакви. Второто число е записано с две различни цифри, които, ако се разменят, се получава третото число. Кое е четвъртото число?

53. Да се намери лицето на трапеца $ABCD$ с основи AB и CD, ако $BC = 4$ см, а разстоянието от точките D и A съответно до правата BC са 2 см и 5 см.

6. КЛАС

54. Пет футболни отбора провели турнир – всеки срещу всеки по един мач. За победа всеки отбор получава три точки. При равен мач отборите получават по 1 точка. При загуба отборите не получават точки. В края на турнира четири от отборите получили съответно по 1, 2, 5 и 7 точки. Колко точки е събрал петият отбор?

55. Един ден Тони пътувала с новата си кола и когато погледнала приборите, забелязала, че на километража се появило числото 25952. „Какво „красиво“ число километри съм пропътувала. Навярно няма да се появи толкова скоро следващото такова „красиво“ число“ – помислила си тя. Но за нейна изненада след 1 час и 20 минути на километража се появило следващото „красиво“ число. С каква скорост е пътувала Тони, ако през цялото време тя е била постоянна?

56. В затворен съд с форма на правоъгълен паралелепипед има 432 литра вода. Ако дъното на съда има най-голяма площ измежду всички стени и поставим съда с дъното надолу, дълбочината на водата ще е 4 дм. Ако поставим последователно съда върху други две от стените, дълбочината на водата ще бъде съответно 6 дм и 8 дм. Да се намери повърхнината и обемът на този съд.

57. Списание „Знам и мога“ излиза по 4 броя годишно. Във всеки брой в рубриката „Незнайко“ се публикуват по 6 задачи. Те са номерирани последователно с естествените числа още от първия брой на списанието, излязъл през първата година на издаване на списанието. Номерът на първата задача от първия излязъл брой е едноцифрено число, но то не е числото 1. (Защо ли? Само редакторите на списанието знаят това.) В брой 4 от 1996 г. , брой 4 от 1997 г. и брой 3 от 2006 г. не са публикувани задачи в рубриката „Незнайко“. Задачите от брой 1 от 2009 г. имат номера 373, 374, 375, 376, 377 и 378.

а) През коя година е започнало да излиза списанието „Знам и мога“ и кой е номерът на първата задача от рубриката „Незнайко“?

б) Нека $A = \overline{abcdn}$ е числото, за което $B = \overline{abcd}$ е годината, а n е номерът на броя, в който е публикувана задачата $Z = \overline{xxx}$ (трицифрено число, записано с една и съща цифра). Ако 6 дели Z, да се намери числото A и сумата от простите делители на A.

7. КЛАС

58. През нощта зайчетата намериха на нивата няколко пълни с моркови щайги и... започна гощавката. Всички зайчета ядоха по равно и изядоха всичките моркови от 10 от щайгите. След обилната вечеря някои от зайчетата ги „заболяха коремчетата“. На другата вечер останалите 7 „здрави“ зайчета се върнаха на нивата и изядоха всички моркови от останалите щайги, като всяко зайче яде два пъти по-малко от предната вечер. Колко бяха пълните щайги с моркови и колко зайчета ги „заболяха коремчетата“?

59. Триъгълникът ABC е равнобедрен с бедра $AC = BC = 1$ см и $\sphericalangle ACB = 36^\circ$. Ъглополовящите AL и BK на ъглите BAC и ABC се пресичат в точка I. Да се намери периметърът на триъгълника AKI.

60. Дадени са числата $A = \underbrace{444\ldots44}_{2010}$, $B = \underbrace{111\ldots11}_{1006}$ и $C = \underbrace{666\ldots66}_{1005}$, като A е записано с 2010 четворки, B е записано с 1006 единици, а C е записано с 1005 шестици. Да се докаже, че числото $D = A + B - C$ е точен квадрат.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА ПО-МАЛКИТЕ

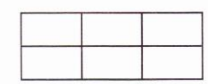
от бр. 4/2009 г.

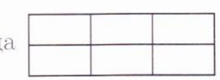
Ст. Стоев

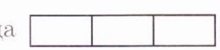
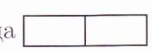
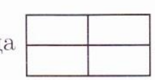
46. Доктор Ох Боли раздал на четири от любимите си животни 2009 чудотворни таблетки с витамини. Носорогът получил една таблетка повече от Крокодила. Хипопотамът получил две таблетки повече от Носорога, а Слончо – две повече от Хипопотама. Колко таблетки с витамини трябва да изяде Слончо?

Решение. Тъй като Хипопотамът получил две таблетки повече от Носорога, а Носорогът получил една таблетка повече от Крокодила, то Хипопотамът е получил 3 таблетки повече от Крокодила. Слончо е получил 2 таблетки повече от Хипопотама, следователно е получил 5 таблетки повече от Крокодила. Така, ако преди животните да изядат таблетките си, вземем от Носорога 1 таблетка, от Хипопотама – 3 таблетки и от Слончо – 5 таблетки, всички животни ще имат колкото таблетки има Крокодила, т.е. по равно. Всеки от тях би имал по $(2009 - 9) : 4 = 500$ таблетки. Следователно Слончо трябва да изяде $500 + 5 = 505$ таблетки.

47. Еми погледна рисунката на Иво и каза: „Тук са нарисувани 7 правоъгълника – един голям и шест малки правоъгълника.“ Иво добави: „Тук има и още правоъгълници, различни от тези, които виждаш.“ Колко са всички правоъгълници на тази рисунка?



Решение. Еми откри 6 малки правоъгълника от вида  и 1 голям правоъгълник от вида .

Остават още 2 правоъгълника от вида , 7 правоъгълника от вида  и 2 правоъгълника от вида .

Общо $6 + 1 + 2 + 7 + 2 = 18$ правоъгълника.

48. Учениците от едно училище, които са 2009 на брой, били построени в редица, след което започнали да се броят на глас по трима: $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots$. След като приключили това броене, незнайно по каква причина решили да се преброят по четирима: $1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Колко от учениците са казали 1 и при двете преброявания?

Решение. При първото преброяване учениците казват последователно $1, 2, 3; 1, 2, 3; 1, 2, 3; 1, 2, 3; 1, 2, 3; \ldots$. При второто преброяване казват $1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 4; \ldots$. Във всяка група от 12 ученика първият казва „1" и при двете преброявания. Тъй като $2009 : 12 = 167$ (ост. 5), то учениците могат да се разделят на 167 групи по 12 и ще останат 5 ученика в последната непълна 168-ма група. Първият от тях казва „1" при двете преброявания. Следователно 168 ученика са казали „1" и при двете преброявания.

49. За Нова година Ани и Боби получили много подаръци, сред които и един общ подарък – сборник със задачи по математика. До края на месец март Ани решила 232 задачи от този сборник, а Боби – 199. Боби съобразил, че до края на сборника му остава да реши 4 пъти повече задачи, отколкото й остават на Ани. Колко са всички задачи в този сборник?

Решение. До края на март Ани е решила $232 - 199 = 33$ задачи повече от Боби. Ако на Ани остават да реши още x задачи, то задачите които трябва да реши Боби, са $4x$. Следователно $4x - x = 33$, откъдето получаваме $x = 11$. Следователно сборникът съдържа $232 + 11 = 243$ задачи.

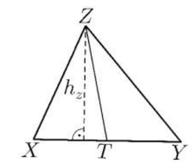
50. Един ден Мечо Пух и приятелят му Прасчо посетили горската сладкарница. И двамата си харесали една и съща торта и решили да си я поделят. Пух разрязал тортата по братски, но Прасчо се оплакал, че парчето му е много, много малко. Тогава Мечо Пух му дал една трета от своята част и така парчето торта на Прасчо се увеличило три пъти. Каква част от тортата е заделил първоначално Пух за себе си и каква част – за Прасчо?

Решение. Една трета част от парчето торта на Мечо Пух увеличила парчето на Прасчо 3 пъти. Следователно една трета част от парчето на Мечо Пух е два пъти по-голяма от парчето торта на Прасчо, откъдето следва, че парчето на Пух е 6 пъти по-голямо от парчето на Прасчо. В началото Мечо Пух разделил тортата на 7 равни части, една дал на Прасчо и останалите шест – на Пух. Така Мечо Пух е заделил $\frac{6}{7}$ част от тортата за себе си и $\frac{1}{7}$ част от тортата за Прасчо.

51. В триъгълника ABC точка M е среда на страната AB, а точка N е среда на отсечката CM. Построена е височината CD от върха C към страната AB, като точка M е между точките A и D. Нека правата BN пресича правата AC в точка P. Ако $CB = 13$ см, $CD = 12$ см, $AC = 20$ см и лицето на триъгълника BCN е равно на 31,5 кв. см, намерете:

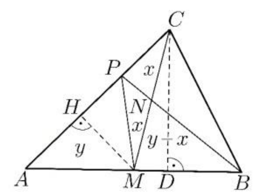
а) лицето и обиколката на триъгълника ABC;

б) дължината на отсечката CP и лицето на четириъгълника $AMNP$.



Решение. а) Най-напред ще докажем, че ако $\triangle XYZ$ е триъгълник с медиана ZT, то $S_{XYZ} = 2S_{XTZ}$. Нека h_Z е височината, спусната от върха Z. Тогава $S_{XTZ} = \frac{1}{2}XT.h_Z = \frac{1}{2}TY.h_Z = S_{YTZ}$, откъдето следва $S_{XYZ} = 2S_{XTZ}$.

От BN – медиана на $\triangle MBC$ и CM – медиана на $\triangle ABC$ следва, че $S_{ABC} = 2S_{BMC} = 2.2S_{BNC} = 4.31{,}5 = 126$ кв. см. Нека CD е височина в $\triangle ABC$. Тогава $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.CD$; $126 = \frac{1}{2}AB.12$; $AB = \frac{126}{6} = 21$ см. Следователно за периметъра на $\triangle ABC$ получаваме $P_{ABC} = AB + BC + CA = 21 + 13 + 20 = 54$ см.



б) Да означим $S_{PMN} = S_{PCN} = x$ и $S_{AMP} = y$. Тъй като PM е медиана в $\triangle ABP$, то $S_{MPB} = y$, откъдето $S_{MBN} = y - x$. Оттук $S_{AMC} = 2x + y = 63$ и $S_{MBN} = y - x = 31{,}5$. От второто равенство получаваме $y = x + 31{,}5$. Заместваме в първото равенство и получаваме уравнението $2x + x + 31{,}5 = 63$, откъдето $x = 10{,}5$ кв. см, а $y = 42$ кв. см. Тогава $S_{AMNP} = x + y = 10{,}5 + 42 = 52{,}5$ кв. см.

Нека MH е разстоянието от точка M до правата AC. Тогава $\frac{S_{CPM}}{S_{CAM}} = \frac{\frac{1}{2}CP.MH}{\frac{1}{2}CA.MH} = \frac{CP}{CA}$, откъдето $\frac{21}{63} = \frac{CP}{CA} \Rightarrow CP = \frac{1}{3}CA = \frac{1}{3}.20 = 6\frac{2}{3}$ см.

52. Четири различни прости числа имат сбор 226. Едното от числата е записано с две цифри и те са еднакви. Второто число е записано с две различни цифри, които ако се разменят, се получава третото число. Кое е четвъртото число?

Решение. Нека едното число означим с $\overline{xx}$. Тогава $\overline{xx} = 10x + x = 11x$ и тъй като е просто, то $x = 1$. Така едното число е 11. Второто число не е измежду числата 19; 23; 29; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 83 и 89, тъй като при смяна на местата на цифрите им се получават съставни числа. Остава да разгледаме числата 13 и 31; 17 и 71; 37 и 73; 79 и 97. Във всеки един от тези случаи за четвъртото число получаваме

$226 - (11 + 13 + 31) = 171 = 9.19$, което е съставно число;

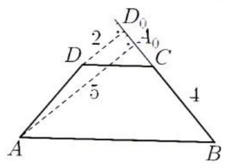
$226 - (11 + 17 + 71) = 127$, което е просто число;

$226 - (11 + 37 + 73) = 105 = 3.5.7$, което е съставно число;

$226 - (11 + 79 + 97) = 39 = 3.13$ – съставно.

Окончателно за четвъртото число получаваме 127.

53. Да се намери лицето на трапеца $ABCD$ с основи AB и CD, ако $BC = 4$ см, а разстоянието от точките D и A до правата BC са съответно 2 см и 5 см.



Решение. За лицето на трапеца $ABCD$ имаме $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$. Тъй като AB и CD са успоредни, то $S_{ACD} = S_{BCD}$. Тогава $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{BCD}$. Нека AA_0 и DD_0 са съответно разстоянията от точките A и D до правата BC. Следователно $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{BCD} = \dfrac{BC.AA_0}{2} + \dfrac{BC.DD_0}{2} = \dfrac{4.5}{2} + \dfrac{4.2}{2} = 14$ кв. см.

54. Пет футболни отбора провели турнир – всеки срещу всеки по един мач. За победа отборът – победител получава три точки. При равен мач отборите получават по 1 точка. При загуба загубилият отбор не получава точки. В края на турнира четири от отборите получили съответно по 1; 2; 5 и 7 точки. Колко точки е събрал петият отбор?

	A	B	C	D	E
A		1	0	0	0
B	1		1	0	0
C	3	1		1	0
D	3	3	1		0
E	3	3	3	3	

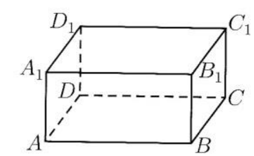
Решение. Нека отборът A е спечелил 1 точка, отборът B – 2 точки, отборът C – 5 точки и отборът D – 7 точки. Нека отборът E е петият отбор. Всеки отбор е играл по 4 мача. Ясно е, че A има един равен мач и 3 загуби. Отборът B има два равни мача и две загуби. Отборът C не може да събере 5 точки само с равни мачове. Следователно C има 1 победа, 2 равни мача и 1 загуба. Отборът D има две победи (при 1 победа не може от 4 мача да събере 7 точки). Така D има още равен мач и загуба. Отборите A, B, C и D имат 3 победи и 7 загуби. Но броят на победите е равен на броя на загубите. Следователно отборът E има 4 победи и е набрал 12 точки. В таблицата е показано възможно разпределение на точките в срещите между отборите.

55. Един ден Тони пътувала с новата си кола и когато погледнала приборите, забелязала, че на километража се появило числото 25952. „Какво „красиво" число километри съм пропътувала. Навярно няма да се появи толкова скоро следващото такова „красиво" число" – помислила си тя. Но за нейна изненада след 1 час и 20 минути на километража се появило следващото „красиво" число. С каква скорост е пътувала Тони, ако през цялото време тя е била постоянна?

Решение. „Красивото" число, което видяла Тони, има вида $\overline{xyzyx}$ и се нарича палиндром. Следващото по големина „красиво" число след 25952 е числото 26062. Следователно за 1 час и 20 минути Тони е изминала $26062 - 25952 = 110$ км. Тъй като 1 час и 20 минути са $\dfrac{4}{3}$ часа, то скоростта, с която е пътувала Тони, е

$$v = \frac{s}{t} = \frac{110}{\frac{4}{3}} = \frac{110.3}{4} = 82{,}5 \text{ км/ч}.$$

56. В затворен съд с форма на правоъгълен паралелепипед има 432 литра вода. Ако дъното на съда има най-голяма площ измежду всички стени и поставим съда с дъното надолу, дълбочината на водата ще е 4 дм. Ако поставим последователно съда върху други две от стените – дълбочината на водата ще бъде съответно 6 дм и 8 дм. Намерете повърхнината и обема на този съд.



Решение. Нека измеренията на правоъгълния паралелепипед в дециметри са съответно $AB = a$, $BC = b$ и $CC_1 = c$, като $a > b > c$. Вместимостта на водата е 432 литра и тъй като тя заема формата на съда, в който е налята, то $a.b.4 = 432$, когато нивото на водата е 4 дм.

Когато съдът е бил обърнат върху стената с измерения b и c, нивото на водата в него е било 6 дм и съответно имаме $b.c.6 = 432$. Аналогично получаваме и равенството $a.c.8 = 432$. Следователно $ab = 108$; $bc = 72$; $ac = 54$, откъдето за повърхнината на паралелепипеда получаваме $S = 2(ab + bc + ac) = 2.(108 + 72 + 54) = 468$ кв.дм. От $ab.bc.ac = 108.72.54$ за обема на паралелепипеда получаваме $V^2 = (abc)^2 = 108.72.54 = 2.54.2.6.6.54 = (2.6.54)^2$, откъдето $V = 2.6.54 = 648$ литра.

57. Списание „Знам и мога“ излиза по 4 броя годишно. Във всеки брой в рубриката „Незнайко“ се публикуват по 6 задачи. Те са номерирани последователно с естествените числа още от първия брой на списанието, излязъл през първата година на издаване на списанието. Номерът на първата задача от първия излязъл брой е едноцифрено число, но то не е числото 1. (Защо ли? Само редакторите на списанието знаят това.) В брой 4 от 1996 г., брой 4 от 1997 г. и брой 3 от 2006 г. не са публикувани задачи в рубриката „Незнайко“. Задачите от брой 1 от 2009 г. имат номера: 373, 374, 375, 376, 377 и 378.

През коя година е започнало да излиза списанието „Знам и мога“ и кой е номерът на първата задача от рубриката „Незнайко“?

Решение. По условие номерът на последната публикувана задача в брой 1 от 2009 година е 378. Тъй като във всеки брой се публикуват по 6 задачи, то броят на списанията е $378 : 6 = 63$ и номерът на всяка първа задача във всяко от списанията е число, което при деление на 6 дава остатък 1.

Съгласно условието номерът на първата задача от първия публикуван брой не е 1, но е едноцифрено число. Следователно номерът на първата публикувана задача е 7 и тогава списанията са 62 на брой. До края на 2008 година са излезли $62 - 1 + 3 = 64$ списания (махаме 1 брой от 2009 година и прибавяме 3 броя, в които не са публикувани задачи).

Броят на годините, през които е излизало списание „Знам и мога“, е $64 : 4 = 16$. От 1993 година до 2008 година са точно 16 години, следователно списание „Знам и мога“ е започнало да излиза през 1993 година и номерът на първата публикувана задача е 7.

58. През нощта зайчетата намериха на нивата няколко пълни с моркови щайги и... започна гощавката. Всички зайчета ядоха по равно и изядоха всичките моркови в 10 от щайгите. След обилната вечеря някои от зайчетата ги „заболяха коремчетата“. На другата вечер останалите 7 „здрави“ зайчета се върнаха на нивата и изядоха всички моркови от останалите щайги, като всяко зайче яде два пъти по-малко от предната вечер. Колко бяха пълните щайги с моркови и колко зайчета ги „заболяха коремчетата“?

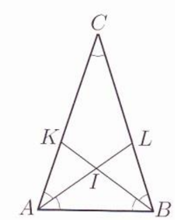
Решение. Нека всички зайчета са x на брой. Следователно x е естествено число и $x > 7$, тъй като след първата вечер са останали 7 зайчета.

Нека всички щайги са y на брой. Тогава може да направим извода, че y е естествено число и $y > 10$, тъй като има поне 10 щайги. Ако във всяка щайга има по a кг моркови, то първата вечер зайчетата са изяли $10.a$ килограма моркови, а всяко зайче е изяло $\dfrac{10a}{x}$ кг моркови. През втората вечер всяко „здраво“ зайче е яло два пъти по-малко, следователно е изяло $\dfrac{1}{2}.\dfrac{10a}{x} = \dfrac{5a}{x}$ килограма. Но зайчетата са били 7 и следователно са изяли $7.\dfrac{5a}{x}$ кг.

От друга страна, останалите щайги след първата вечер са $y - 10$, а морковите в тях са $(y - 10).a$ кг. Така получаваме уравнението $7.\dfrac{5a}{x} = (y - 10).a$, което е еквивалентно на $\dfrac{35}{x} = y - 10$. Лявата страна на уравнението приема цели стойности и следователно $\dfrac{35}{x}$ е цяло число. Тогава $x = 1$, 5, 7 или 35. Тъй като $x > 7$, то единствената възможна стойност за x е 35.

Следователно $35 - 7 = 28$ са яли моркови само първата вечер и щайгите са били $y = 10 + \dfrac{35}{35} = 11$ на брой.

59. Триъгълникът ABC е равнобедрен с бедра $AC = BC = 1$ cm и $\sphericalangle ACB = 36^\circ$. Ъглополовящите AL и BK на ъглите BAC и ABC се пресичат в точка I. Намерете периметъра на триъгълник AKI.



Решение. $\triangle ABC$ е равнобедрен и $AC = BC$. Следователно $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAB = \alpha$ и тъй като $\sphericalangle ACB = 36^\circ$, получаваме $2\alpha + 36^\circ = 180^\circ$, откъдето $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAB = 72^\circ$. Тъй като AL и BK са ъглополовящи, то $\sphericalangle CAL = \sphericalangle LAB = \sphericalangle CBK = \sphericalangle KBA = 36^\circ$. Тогава $\triangle ACL$ и $\triangle BCK$ са равнобедрени и за тях имаме $AC = BC$, $\sphericalangle CAL = \sphericalangle CBK = 36^\circ$ и $\sphericalangle ACB$ е общ за двата триъгълника. Следователно $\triangle ACL \cong \triangle BCK$ по втори признак и $CK = CL$, както и $AL = BK$ като съответни елементи. Така $CK = CL = AL = BK$.

От друга страна, $\triangle AIB$ е равнобедрен, тъй като $\sphericalangle LAB = \sphericalangle KBA = 36^\circ$. Тогава $AI = BI$, откъдето $LI = AL - AI = BK - BI = KI$. Следователно за периметъра на AIK получаваме $P_{AIK} = AI + IK + KA = AI + IL + KA$. От $AI + IL = AL$ и $AL = CK$, получаваме $P_{AIK} = AL + KA = CK + KA = AC = 1$ см.

60. Дадени са числата $A = \underbrace{444...44}_{2010}$, $B = \underbrace{111...11}_{1006}$ и $C = \underbrace{666...66}_{1005}$, като A е записано с 2010 четворки, B е записано с 1006 единици, а C е записано с 1005 шестици. Докажете, че числото $D = A + B - C$ е точен квадрат.

Решение. Извършваме последователни преобразувания за D:

$$
\begin{aligned}
D = A + B - C &= \underbrace{444...44}_{2010} + \underbrace{111...11}_{1006} - \underbrace{666...66}_{1005} = \\
&= 4.\underbrace{111...11}_{2010} + \underbrace{111...11}_{1006} - 6.\underbrace{111...11}_{1005} = \\
&= \frac{4}{9}.\underbrace{999...99}_{2010} + \frac{1}{9}.\underbrace{999...99}_{1006} - \frac{6}{9}.\underbrace{999...99}_{1005} = \\
&= \frac{4}{9}.\left(10^{2010} - 1\right) + \frac{1}{9}.\left(10^{1006} - 1\right) - \frac{6}{9}.\left(10^{1005} - 1\right) = \\
&= \frac{4.10^{2010} + 10^{1006} - 6.10^{1005} - 4 - 1 + 6}{9} = \\
&= \frac{(2.10^{1005})^2 + 10.10^{1005} - 6.10^{1005} + 1}{9} = \\
&= \frac{(2.10^{1005})^2 + (10 - 6).10^{1005} + 1}{9} = \\
&= \frac{(2.10^{1005})^2 + 2.2.10^{1005} + 1}{9} = \left(\frac{2.10^{1005} + 1}{3}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Числото $2.10^{1005} + 1 = 2\underbrace{000...0}_{1004}1$ се дели на 3, тъй като сумата от цифрите му е 3. Следователно D е точен квадрат на цяло число.