25. **а)** Сборът от цифрите на кое петцифрено число е равен на 1?

б) Сборът от цифрите на кое петцифрено число е равен на 45?

26. Бутилка вино струва 4 лв. и половин бутилка вино. Колко струват 5 бутилки вино?

27. Умаляемото е 23 776, умалителят е 882. Колко е разликата?

28. **а)** Да се запише трицифрено число, чийто сбор от цифрите на стотиците и единиците е равен на 18, а цифрата на десетиците е най-малкото нечетно число.

б) Да се запише четирицифрено число, чийто сбор от хилядите и стотиците е равен на 17, като цифрата на стотиците е по-малка, а цифрите на десетиците и единиците са възможно най-големи.

29. След като спортист пробягал 14 645 м, до финала му останали 9290 м по-малко от вече пробяганото разстояние. Колко метра е цялото разстояние, което трябва да пробяга спортистът?

30. Сборът на три числа е 125 760. Първото събираемо е най-голямото четирицифрено число, а второто събираемо е най-малкото шестцифрено число. Намерете третото събираемо.

Тема 2 Задачи от математически състезания до 5. клас

Две числа, като например 385 и 583, се наричат ***огледални***. Огледалното на числото $\overline{abcd}$ е $\overline{dcba}$. Числата, които са равни на огледалните си, се наричат ***симетрични***. Например такова число е 58785.

1. Да се намерят две огледални числа, чието произведение е 39 483.

2. Произведението на едно число и огледалното му е равно на 78 445. Да се намери това число.

(София, 1986 г.)

3. Сборът на двуцифрено число и четирицифрено число е 3601, а сборът на техните огледални числа е 8290. Кои са числата?

4. Едно естествено число ще наричаме „красиво“, ако всяка негова цифра е по-голяма от сбора на цифрите, намиращи се вдясно от нея. Например 7510 е „красиво“ число защото $1 > 0$; $5 > 1 + 0$; $7 > 5 + 1 + 0$. Да се намерят всички „красиви“ петцифрени числа.

(Зимни математически състезания, Русе, 1988 г.)

5. Нека x, y, z са 3 естествени числа и е дадено, че $x = 2; y = 313; 3$ дели z и сумата на всеки 2 от числата x, y, z е по-голяма от третото число. Намерете сумата $x + y + z$.

6. Две естествени числа са записани само с помощта на цифрите 1, 4, 6 и 9. Може ли едното от тях да е 17 пъти по-голямо от другото?

7. Да се намерят дължините на страните на триъгълник, ако е известно, че те са последователни четни числа и обиколката на триъгълника е по-малка от обиколката на квадрат със страна 6 см.

8. За номериране на страниците на една книга употребили 642 цифри. Определете колко страници има книгата.

(София, 1986 г.)

9. Книга съдържа 256 страници, като на всяка страница е отпечатан съответният ѝ номер. Определете броя на отпечатаните цифри на съответните страници на книгата.

10. Собственик на фабрика за монети имал 10 работници. Сутрин раздавал на всеки от тях злато, за да изработи 100 монети по 10 г. След няколко дни фабрикантът установил, че някой от работниците произвеждал монети с тегло 9 г и присвоявал икономисаното злато. Как само с едно претегляне на монетите може да се открие фалшификаторът?

11. Чаша и лъжица тежат колкото нож и вилица, а чашата и вилицата са по-тежки от лъжицата и ножа. Лъжицата и вилицата са по-леки от чашата. Кой от предметите е най-лек и кой – най-тежък? Могат ли да се подредят по тегло тези предмети?

12. Дадена е редицата 1, 2, 3, ..., 1999, 2000.

а) Числата от редицата могат да се разделят на 4 групи по такъв начин, че сборът им във всяка група да е един и същ. Да се намери този сбор.

б) Да се конструира поне една редица на числата от четирите групи така, че сборът на числата във всяка група да е един и същи.

13. Като разделим числото 100 на числото b, се получава частно q и остатък 6. Да се намерят числата b и q.

14. В една страна има четири футболни отбора: А, В, С и Д. В мачове за първенството на страната те изиграли всеки срещу всеки по два мача, при разменено гостуване.

а) Колко мача всичко са изиграли отборите?

б) Ако отборът А е набрал 8 точки, В - 7 точки, а С - 5 точки, да се намери колко точки е набрал отборът Д (отборът победител получава 2 точки, а при равен резултат отборите получават по 1 точка).

(2. кръг на ОМ, 1984 г.)

15. Намерете едноцифрените естествени числа a, b, c, d, ако $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 4321$.

16. Числата 7, 9, 11 и 86 са делимо, делител, частно и остатък. Да се определи кое е делимото, кое е делителят, кое е частното и кое е остатъкът. Отговорът да се обоснове.

(Пазарджик, 1988 г.)

17. Даден е сборът $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 107$.

а) Докажете, че S се дели на 18.

б) Намерете най-голямото трицифрено число n, за което $S + n$ се дели на 10.

18. а) Докажете, че сумата на числата от 1 до произволно число, завършващо на 5, се дели на 5.

б) Докажете, че сумата от произволни 12 последователни естествени числа не се дели на 4.

19. а) Има ли четирицифрено число, чиито цифри могат да се разместят така, че сборът на новополученото и даденото число да е равен на 9999?

б) Има ли трицифрено число, чиито цифри могат да се разместят така, че сборът от новополученото число и това число да е равен на 999?

(Зимни математически състезания – Русе, 1986 г.)

20. В три кошници имало общо 60 рози. След като от първата кошница преместили 8 рози във втората, след това от втората в третата – 6 рози, и накрая от третата в първата – 2 рози, оказало се, че във всяка кошница имало по равен брой рози. Колко рози имало първоначално във всяка кошница?

(2. кръг на ОМ, 1995 г.)

21. Сборът на три естествени числа е 14. Ако едното от тях увеличим 3 пъти, второто – 2 пъти, а третото оставим непроменено, сборът на новите три числа става 36. Да се намерят първоначалните числа, ако нито едно от тях не е просто.

(„Ив. Салабашев“, Стара Загора, 1996 г.)

22. Сборът на три различни естествени числа е 14. Ако едното от тях се увеличи два пъти, сборът на трите числа ще стане 24. Да се намерят тези числа.

(2. кръг на ОМ, 1988 г.)

23. Да се попълнят празните клетки в квадрата с числа, които не са по-големи от 20. В различните клетки трябва да се поставят различни числа по такъв начин, че сборовете на числата във всеки ред и във всеки стълб да са едни и същи и освен това произведенията на числа̀та от двата диагонала да са равни.

3		9
	2	

24. Ако $7|4x + 15y$ и $7|16x + 5y$, докажете, че $7|x + y$.

Упътване: Символът $b|a$, където a и $b \neq 0$ са цели числа, означава, че b дели a.

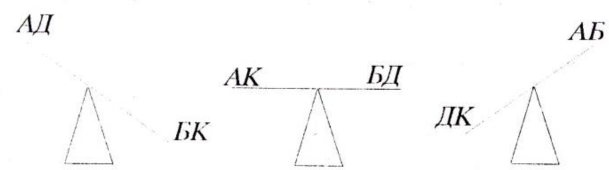
25. Отделение войници стига до река, през която непременно трябвало да мине. Мостът е разрушен от неотдавнашното наводнение и още не е поправен, а реката е твърде дълбока, за да я прегазят. В малка лодка край брега си играят

две момчета. Лодката е толкова малка, че едва един войник би се побрал в нея (или двете момчета!). Въпреки това с тази именно лодка преминали на другата страна на реката всички войници. Как е станало това?

26. В цветарски магазин има 14 саксии с по един, с по два и с по три зюмбюла. Броят на всички зюмбюли е 26. Саксиите с по един зюмбюл са толкова на брой, колкото са всички останали саксии. Колко от саксиите са с по един, с по два и с по три зюмбюла? *(2. кръг на ОМ, 1993 г.)*

27. На математическо състезание Димка получила 13 точки. За няколко от задачите получила по 3 точки, а за други – по 2 точки. Колко задачи е решила Димка?

28. Адам, Бърт, Клаудия и Дитер се качвали на люлка, като се разпределяли по три различни начина, както е показано:



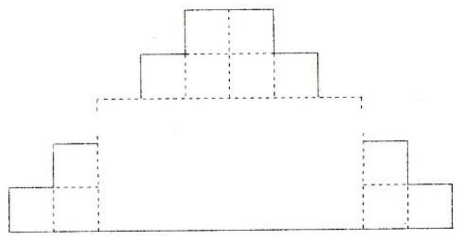
Наредете децата по тегло, като започнете от най-тежкото.

29. Докажете, че сумата от 2 последователни нечетни числа се дели на 4.

30. В една сладкарница всички пасти стрували по 16 лв. В деня на детето собственикът ѝ обявил, че всяко дете, което влезе в сладкарницата, може да купува пасти за два пъти повече пари, отколкото носи в себе си. На този ден Бирлибан влязъл 4 пъти в сладкарницата, като всеки път изяждал по една паста, след което останал без пари. Колко лева е имал Бирлибан при първото си влизане в сладкарницата?

(Зимни състезания, Русе, 1994 г.)

31. Фигурата се състои от квадратчета, като на всеки ред броят им намалява с две. На най-долния ред има 400 квадратчета. Лицето на всяко квадратче е 4 кв. см. Колко е броят на всички квадратчета? Намерете обиколката и лицето на фигурата.



(СМГ, 1997 г.)

32. Игрален автомат при пускане на син жетон връща 5 червени жетона, а при пускане на червен жетон пуска 5 сини жетона. Възможно ли е, ако се започне играта с 1 червен жетон, да се получат равен брой сини и червени жетони?

33. Един баща оставил в наследство на тримата си сина 10 торби с жълтици, които разпределил по следния начин: първата торба оставил празна, във втората сложил 1 жълтица, в третата – 2 жълтици, и т. н., в десетата торба сложил 9 жълтици.

Синовете разпределили всичките торби помежду си, като най-големият син взел 2 торби, а средният син взел повече жълтици, отколкото най-малкият син.

По пътя към дома най-малкият син бил нападнат от разбойници, които му взели четирите торби, и от наследството му останали само 10 жълтици.

Колко жълтици е взел най-големият син?

34. Девет футболиста от един отбор вкарали общо 47 гола, като всеки отбелязал поне по един гол. Един от тях е вкарал 12 гола. Докажете, че има двама, отбелязали по равен брой голове.

35. Правоъгълник, квадрат и равностранен триъгълник имат равни обиколки. Какво най-малко лице може да има правоъгълникът?

36. Да се намери такова трицифрено число, че ако се раздели със сбора от цифрите му, да се получи частно 31 и остатък 24.

Тема 3 Аритметични ребуси

Аритметичен ребус представлява символичен запис на дадено равенство, съдържащо едно или няколко аритметични действия (събиране, изваждане, умножение, деление). Символите, участващи в ребусите, може да бъдат букви от различни азбуки, звездички, геометрични фигури и др. Всяка цифра е „зашифрована“ посредством един символ. Обикновено се смята, че на различни символи съответстват различни цифри, а на еднаквите символи – еднакви цифри. При това цифрата 0 не може да стои в началото на число от ребуса. Ако в него има само еднакви символи, те може да означават както различни, така и еднакви цифри.

Ще отбележим изрично, че чрез символа AB ще означаваме двуцифрено число с цифра A на десетиците и цифра B на единиците, т. е. $AB = 10.A + B$.

Да се реши един ребус означава да се възстанови във всички възможни варианти цифровият запис на означените действия в зададеното равенство или да се покаже, че то не е изпълнимо.

Не съществува общ метод за решаване на ребуси. Най-често се използват известни свойства на цифрите в означените дейс-

23. ***Решение.*** През всяко денонощие от първите 29 денонощия мравката се изкачва по на 1 м. Следователно за 29 денонощия тя ще се изкачи на 29 м височина. През тридесетия ден мравката ще се изкачи с още 6 м и ще достигне върха.

24. Отговор. $555 + 1225 = 1780$.

25. Отговор. а) 10 000; **б)** 99 999.

26. Отговор. 40 лв.

27. Отговор. $23\ 776 - 882 = 22\ 894$.

28. Отговор. а) 919; **б)** 9899.

29. ***Решение.*** $14\ 645 - 9290 = 5355$ м остават на спортиста да пробяга до финала. Цялото разстояние, което трябва да пробяга спортистът, е $14\ 645 + 5355 = 20\ 000$ м.

30. Отговор. Първото събираемо е 9999, второто събираемо е 100000, а третото е $125\ 760 - (9999 + 100\ 000) = 125\ 760 - 109\ 999 = 15\ 761$.

Тема 2. Задачи от математически състезания до 5. клас

1. Отговор. 123 и 321.

2. Отговор. 145, 541. ***Упътване.*** Търсеното число е трицифрено (защо?). Тъй като произведението има цифра на единиците 5, то цифрата на единиците на единия множител е 5, а на другия е нечетно число (1, 3, 5, 7 или 9). Лесно се съобразява, че тази цифра не може да е по-голяма от 1 (защо?). Тъй като $135.531 = 71\ 685$ и $155.551 = 85\ 405$, то цифрата на десетиците е 4.

3. Отговор. 73 и 3528.

4. Отговор. 84 210, 94 210, 95 210. ***Решение.*** Ще докажем, че цифрата на единиците е 0. Нека цифрата на единиците е 1. Тогава цифрата на десетиците е най-малко 2, а на стотиците е най-малко 4. Цифрата на хилядите е най-малко 8, а цифрата на десетохилядите е двуцифрено число. Следователно цифрата на единиците е 0. По аналогичен начин се показва, че цифрата на десетиците е 1, а на стотиците – 2. Тогава цифрата на хилядите може да е 4 или 5. В първия случай цифрата на десетохилядите може да е 8 или 9, а във втория случай е 9.

5. Отговор. 627.

6. Отговор. Не. ***Упътване.*** Трябва да отговорите на въпроса съществуват ли числа A и B, записани само с цифрите 1, 4, 6 и 9 такива, че $A = 17.B$. Щом цифрата на единиците на B е някое от числата 1, 4, 6 и 9, то цифрата на единиците на числото $A = 17.B$ е съответно 7, 8, 2 или 3 (защо?).

7. Отговор. 2, 4, 6; 4, 6, 8.

8. Отговор. 250.

9. Отговор. 660.

10. ***Упътване.*** Да номерираме работниците с числата от 1 до 10 и да вземем от всеки работник по толкова монети, колкото е съответният им брой. Броят на тези монети е $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ и те трябва да тежат 550 г. Разликата между това число и действителното тегло на тези монети ще ни даде номера на работника, който изработва по-леките монети (защо?).

11. Отговор. Най-лека е лъжицата; най-тежка е чашата; не могат да се подредят.

12. Отговор. а) 250.2001; **б)** Една възможна конструкция: $(1 + 2 + 3 + \ldots + 250 + 2000 + 1999 + \ldots + 1751) + (251 + 252 + \ldots + 500 + 1750 + \ldots + 1501) + (501 + 502 + \ldots +$

$750 + 1500 + ... + 1251) + (751 + 752 + ... + 1000 + 1250 + ... + 1001)$.

13. Отговор. 94, 1; 47, 2. ***Упътване.*** Използвайте, че $100 = b.q + 6$, т. е. $b.q = 94 = 1.94 = 2.47$.

14. Отговор. а) 12; **б)** 4.

15. Отговор. $a = 3, b = 8, c = 9, d = 1$.

16. ***Упътване.*** Ясно е, че 86 е делимо (защо?), а 11 не може да е остатък (защо?). Но $11.9 = 99 > 86$ и тогава числото 9 е остатък. Следователно $86 = 11.7 + 9$, т. е. 86 е делимо, 11 е делител, 7 е частно и 9 е остатък.

17. Отговор. б) 992.

18. ***Упътване.*** **б)** $n + (n+1) + (n+2) + ... + (n+11) = 12n + 66$.

19. ***Упътване.*** Разгледайте сумата на четирицифреното число $\overline{abcd}$ с всички възможни четирицифрени числа, които се получават, като разместим цифрите a, b, c и d. Броят на възможностите се намалява в случаите, в които една и съща цифра стои на едно и също място и в двете числа.

20. Отговор. 26; 18; 16.

21. ***Упътване.*** Щом при удвояване на едното число сборът на трите числа се увеличава с $24 - 14 = 10$, то това число е 10. Решете диофантовото уравнение $x + y = 4$.

22. ***Упътване.*** Нека търсените естествени числа са x, y, z. Тогава $x+y+z = 14$ и $3x+2y+z = 36$. Оттук $3x+3y+3z = 42$ или $3x + 2y + z + y + 2z = 42$ и $y + 2z = 42 - 36 = 6$. След проверка се намира, че $x = 9, y = 4, z = 1$.

23. ***Упътване.*** В квадратчето под 2 числото е 10. Тогава в долното ляво и дясно квадратче числата са съответно x и $3x$.

24. ***Решение.*** $7|(4x + 15y) + (16x + 5y) \Rightarrow 7|20x + 20y \Rightarrow 7|20(x + y) \Rightarrow 7|x + y$ (защото 7 е взаимно просто с 20).

25. ***Упътване.*** С лодката първоначално отиват на другия бряг двете момчета, а се връща едното от тях.

26. ***Упътване.*** По условие от всичките 14 саксии половината са с по 1 зюмбюл, т. е. те са $14 : 2 = 7$ саксии. Зюмбюлите в останалите 7 саксии са $26 - 7 = 19$. Във всяка от тях има поне по два зюмбюла, т. е. общо поне $7.2 = 14$ зюмбюла. Значи по три зюмбюла има в $19 - 14 = 5$ саксии. По два зюмбюла има в $7 - 5 = 2$ саксии.

27. Отговор. 6 или 5.

28. Отговор. К > Д > Б > А.

29. ***Упътване.*** Означете едното число с $2x + 1$. Тогава следващото нечетно число е $2x + 3$. Следователно $2x + 1 + 2x + 3 = 4x + 4 = 4(x + 1)$.

30. Отговор. 15. ***Упътване.*** Проведете разсъжденията отзад-напред. При последното си влизане Бирлибан имал 8 лв. и похарчил 16 лв.

31. Отговор. 40 200; 3200 см; 160 800 кв. см. ***Упътване.*** Пресметнете сбора: $2 + 4 + ... + 400$.

32. ***Упътване.*** Не е възможно, тъй като след всеки ход броят на сините и червените жетони е от различна четност.

33. Отговор. 12.

34. ***Упътване.*** $1 + 2 + ... + 8 + 12 > 47$.

35. Отговор. 11 кв. ед.

36. Отговор. 779. ***Упътване.*** Ако означим търсеното число с $\overline{abc}$, тогава $\overline{abc} = 31.(a + b + c) + 24$, т. е. $a + b + c > 24$ $(25, 26)$

$$100a + 10b + c = 31(a + b + c) + 24,$$
$$99a + 9b = 30(a + b + c) + 24,$$
$$33a + 3b = 10(a + b + c) + 8.$$