5. НЕРАВЕНСТВА

I. Неравенства в алгебрата

НИВО А → ЗАДАЧИ ЗА ВСИЧКИ УЧЕНИЦИ

1 Дадени са числата:
а) 2 и 13; б) −8 и 10;
в) −4 и −9; г) −11 и −3.
Свържете числата с един от знаците ">" или "<", така че да се получи вярно числово неравенство.

2 Сравнете числата:
а) −1,5 и 1; б) −2,8 и 0;
в) −1,1 и −2,3; г) $-\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{4}$.

Запишете с числово неравенство твърденията:

3 а) Числото a е по-малко от −5.
б) Числото b е по-голямо от −3.
в) Числото c е по-голямо или равно на 4.
г) Числото d е по-малко или равно на −1.

4 а) Числото a е положително.
б) Числото b е отрицателно.
в) Числото c е неотрицателно.
г) Числото d е неположително.

5 а) Числото x е между числата 3 и 7.
б) Числото y е между числата −2 и 5.
в) Числото z е между числата −7 и −1.
г) Числото t е между числата −2,5 и 3,8.

6 Извършете умножението:
а) $3 < 5 \mid .\,2$; $4 > 3 \mid .\,3$;
б) $-2 < 5 \mid .\,2$; $-4 > -9 \mid .\,3$;
в) $2 < 7 \mid .\,(-1)$; $3 > 1 \mid .\,(-2)$;
г) $-5 < -3 \mid .\,(-2)$; $8 > -4 \mid .\,(-1)$.

7 Умножете с (−1) двете страни на неравенствата:
а) $2 < 7$; $-3 < 5$;
б) $1,2 > -3$; $\frac{1}{3} < 4$;
в) $-0,5 > -5$; $-7 < -0,3$;
г) $1\frac{1}{2} < 5\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3} < \frac{1}{3}$.

8 Съкратете неравенствата:
а) 14 < 16 с 2;
б) 21 > −6 с 3;
в) −15 < −5 с −5;
г) −20 > −100 с −20.

Решете неравенствата:

9 а) $2x < 8$; б) $4x > -16$;
в) $3x < 9,3$; г) $5x > -20,5$.

10 а) $-3x < 6$; б) $-4x > -12$;
в) $-5x < -30$; г) $-11x > 33$.

11 а) $\frac{x}{2} > 5$; б) $\frac{x}{3} < -1$;
в) $\frac{x}{-2} > 3$; г) $\frac{x}{-4} < -1$.

12 а) $5x - 3x < 8$;
б) $4x - 2x > 6$;
в) $3,5x + 2,5x > -12$;
г) $4,3x - 2,3x < -4$.

13 а) $3x - 5x < 6$;
б) $4x - 9x > 10$;
в) $3,5x - 7,5x > 12$;
г) $2,3x - 6,3x < 16$.

14 а) $3x - 5 < x + 3$;
б) $4x - 4 < x + 5$;
в) $2,5x - 3 < 2 - 2,5x$;
г) $3,3x - 6 > -2,7x + 12$.

15 а) $2x - 1 < 5x + 5$;
б) $3x - 2 < 6x + 7$;
в) $4,5x - 3 > 6,5x - 9$;
г) $3,7x + 4 > 5,7x - 4$.

16 а) $4(x + 2) > 3(x - 1)$;
б) $5(x - 2) > 3(x + 2)$;

в) $2(x+5) < 3(x-4)$;

г) $3(x-2) < 5(x+2)$.

17 а) $\frac{x}{2}+1 > \frac{x}{4}-1$;

б) $\frac{x}{3}-1 < \frac{x}{6}+2$;

в) $\frac{x}{5}-3 > \frac{x}{2}+1$;

г) $\frac{x}{2} > \frac{x}{3}-4$.

18 а) $5(x-2)+3(x-1) < 4(x+3)-7$;

б) $3(x+1)+5(x-2) < 6(x+2)+3$;

в) $4(2x-1)+3(x+5) > 9(x+1)-5$;

г) $5(x+2)+3(x-2) < 10(x+4)-12$.

19 а) $3(x-5)+2(x+8) > 7(x-1)+5$;

б) $4(x+3)+5(x-1) < 11(x+2)-30$;

в) $6(x+1)+2(x-3) < 10(x-1)+6$;

г) $3(x+5)+5(x-2) < 11(x+1)-8$.

20 а) $5(x-2)-2(x+1) < 2(x+4)-3$;

б) $7(x-2)-3(x+4) < 2(x+6)-5$;

в) $8(x+1)-2(x-3) > 4(x+2)-6$;

г) $8(x+5)-2(x+4) > 3(x-1)-5$.

21 а) $5(x+8)-2(x+6) < 2(x-4)-3$;

б) $3(x+8)-5(x-2) < 2(x+3)-5$;

в) $4(x-3)-2(x+6) < 4(x+1)-5$;

г) $5(x-1)-8(x-2) < 3(x+2)-2$.

22 а) $3(x+1)-4(x-2) < 2(x+3)-5$;

б) $3(2+x)-5(x+1) > 4(2-x)+1$;

в) $5(3-x)-4(2-x) > 6(x+3)-5$;

г) $8(x+2)-3(5-x) > 13(x-2)+20$.

23 а) $3\left(x+\frac{1}{3}\right)+5(x-1,2) < 6(x+2)-8$;

б) $4(x+2,5)+9\left(x-\frac{5}{9}\right) > 10(x+0,3)-5$;

в) $5(x+1,2)-3\left(x-\frac{2}{3}\right) > 4(x+2,5)-7$;

г) $4(x+3,25)+5(x-1,4) > 7\left(x-\frac{3}{7}\right)+5$.

24 а) $7\left(x-\frac{2}{7}\right)+4(x+1,5) > 9(x-2)+8$;

б) $3\left(x+2\frac{1}{3}\right)+5(x+1,2) < 6\left(x-\frac{2}{3}\right)+7$;

в) $3\left(2x-\frac{1}{3}\right)+7\left(x+1\frac{1}{7}\right) > 11(x-1)+5$;

г) $3\left(x-3\frac{2}{3}\right)+10(x+2,1) < 8(x+0,25)-2$.

25 а) $5(x+2)-3(x+1) > 7(x+4)-8(x+3)$;

б) $8(x-1)-2(x+4) > 4(x+3)-2(x+5)$;

в) $5(x+1,2)-2(x+1,5) < 6(x+4)-2(x+3,5)$;

г) $7(x-2)-8(x+1) > 5(x+3)-2(x+0,5)$.

26 а) $3(2x-1)-5(x+6) > 4(1-x)-3(x+5)$;

б) $8(x+1)-2(5-x) > 5(x+3)+3(x-4)$;

в) $2(x+4)-5(1-x) < 4(x+1,5)-5(1-x)$;

г) $4(x-1)-2(3-2x) < 7(x-1)-3(2-x)$.

27 а) $5(x+3)+3(x-4) > 7(x-2)-2(2x-1)$;

б) $10(x+0,3)-5(x+2) < 3(x+6)+5(x-4)$;

в) $4(x+0,25)-5(x-1,4) < 2(x+3)-4(x+1,5)$;

г) $5(x-3,2)-4(x-1,5) > 6(x+3)-2(x+5)$.

28 а) $7(2-x)-3\left(\frac{2}{3}-x\right) > 5(x+1)-4(x-1)$;

б) $3\left(x+\frac{2}{3}\right)-7\left(x-\frac{3}{7}\right) > 5(x+4)-2(x-6)$;

в) $3\left(x-2\frac{1}{3}\right)-5(x-0,4) > 7\left(x+\frac{5}{7}\right)-3(x+2)$;

г) $4(x+6)-5(x+0,6) < 7\left(x+1\frac{2}{7}\right)-5(x+1,4)$.

29 а) $2,3x-5,8 < 3-5,7x$;

б) $3,4x-2,2 < 5+2,6x$;

в) $2(3,2x-4) < 5(2,4x-1,6)$;

г) $0,3(x-2) > 2(x-0,3)$.

30 а) $1,2(x-5) > 3(x+4)$;

б) $\frac{1}{3}(x-6) > x+2$;

в) $3x-\frac{1}{3}(x+6) > 14$;

г) $0,5(x-4) > \frac{1}{3}(x+9)$.

Решете линейните неравенства:

31 $(x-3)^2-5 > x^2+4x$.

32 $(-2)^7(x-3^5) \geq 0$.

33 $0,5.8^8x > 2.8^4$.

34 $(-3x-2)^2-5(x-2)(x+1)>(-2x+1)^2$.

35 $(x+2)^3-x(x-1)(1+x)<(3x-1)(2x+5)+x$.

36 $(x-2)^3+(3x-5)(2x+1)>x(3+x)(x-3)$.

37 $(2x-3)(4x^2+6x+9)-2x(2x+1)(2x-1)>x+3$.

38 $(x+2)^3+(x-1)^3\ge x^2(2x+3)+30$.

39 $(x-2)(4+2x+x^2)-(x+1)(x^2+1-x)\le$
$\le(x-3)(3-2x)+2x^2$.

40 $(z+3)(z-3)-(2-z)^2\le 8z+3$.

41 $(z-2)^3-z(z^2+6)\ge(2z-3)(1-3z)$.

42 $(x-1)^3-x(x-2)(x+2)\le(1-3x)(x-2)+5$.

43 а) $\frac{x+3}{2}>\frac{x-1}{3}$; б) $\frac{x+5}{4}<\frac{x-3}{2}$;

в) $\frac{2x-1}{3}>\frac{x+5}{2}$; г) $\frac{3x-1}{2}<\frac{x+1}{3}$.

44 а) $\frac{1}{3}(x+21)-\frac{1}{4}(x+8)>1$;

б) $1\frac{1}{3}(x-6)-\frac{2}{3}(x-9)<x-1$;

в) $\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{3}(x-1)>2$;

г) $\frac{1}{3}(x+4)-\frac{1}{2}(x+1)<\frac{1}{6}(x+5)$.

45 а) $\frac{x+7}{4}-\frac{x-2}{2}>\frac{x+1}{3}$;

б) $\frac{x+5}{2}-\frac{x-1}{3}>1-\frac{x+5}{6}$;

в) $\frac{x+3}{6}-\frac{x+2}{3}<1-\frac{x+7}{2}$;

г) $\frac{x+3}{5}-\frac{x+2}{3}>x-\frac{x-4}{15}$.

46 а) $\frac{x-6}{2}-\frac{x+8}{10}<x-\frac{x+3}{5}$;

б) $\frac{x+1}{3}-\frac{x+2}{2}>\frac{x-1}{4}-\frac{x+5}{6}$;

в) $\frac{x+1}{2}-\frac{x+3}{4}>\frac{x+5}{-2}-\frac{x+9}{8}$;

г) $\frac{x-1}{-3}-\frac{x+5}{5}<\frac{x+2}{2}-\frac{x+3}{6}$.

47 $\dfrac{3x+2,5}{3}-\dfrac{4x+1\frac{1}{3}}{4}>\dfrac{5x+\frac{1}{6}}{2}-\dfrac{3x+0,5}{6}$.

48 $\dfrac{3x-7}{-4}-\dfrac{2x+1,25}{3}<\dfrac{7x-5,5}{6}-\dfrac{3x+\frac{1}{6}}{2}$.

49 $\dfrac{2x-3\frac{1}{4}}{-3}-\dfrac{5x-2\frac{1}{3}}{4}<\dfrac{8x-\frac{5}{12}}{-12}-\dfrac{8x-3,5}{6}$.

50 $\dfrac{3x-\frac{5}{6}}{-2}-\dfrac{3x-5\frac{1}{4}}{3}>\dfrac{2x-7\frac{1}{3}}{-4}+\dfrac{7,5-3x}{6}$.

51 $\frac{2x-5}{-2}-\frac{1}{2}\left(6-\frac{3x+1}{3}\right)\le\frac{5x+1}{-6}-\frac{3x+1}{2}$.

52 $\frac{3x+1}{2}-\frac{1}{3}\left(9-\frac{5x+1}{2}\right)\ge\frac{5x+3}{-6}-\frac{x+5}{2}$.

53 $\frac{3x-5}{-2}-\frac{1}{3}\left(6+\frac{2x-1}{-2}\right)<\frac{5x-1}{-1}+\frac{x-3}{2}$.

54 $\frac{2x+1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{2x+1}{3}\right)<\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{2}+\frac{3x+1}{-1}\right)$.

55 $\frac{2x+1}{3}-\frac{1}{2}\left(6-\frac{5-2x}{3}\right)>(-x+1)^2-(x-2)^2$.

56 $\frac{3x+1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{3}-\frac{2x+1}{2}\right)\ge$
$\ge(-x-3)^2-(x-2)(x+2)+1$.

57 $(-2x+1)^2+(2x-3)(-2x-3)\ge\frac{3x-1}{2}-\frac{2x+1}{3}$.

58 $(-x+2)^2-(x-3)(x-1)>\frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{3}-\frac{x+1}{2}\right)-1$.

59 $(-x-2)^2-(x+1)(x+2)>\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{3}(x+2)$.

60 $(x+2)^2-(x+3)(x-2)\ge 3\frac{1}{2}\left(4x-\frac{6}{7}\right)+2$.

61 $(2y-1,5)^2-(2-y)^2\le 3\left(y^2+\frac{3}{4}\right)$.

62 $\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2-\frac{x(x+3)}{3}\le 1-\left(\frac{2-x}{3}\right)\cdot\left(\frac{2+x}{3}\right)$.

63 $(-2x-1)^2-(x+1)^2<3x\left(x+1\frac{1}{3}\right)+8$.

64 $(3+x)^2-(x+2)(x+5)<\frac{2x+3}{3}-\frac{x+2}{2}$.

65 $\left(x-1\frac{1}{2}\right)^2-9(x+0,25)>(-x+4)^2$.

66 $\dfrac{x(x+4)}{2}-1\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{3x^2}{8}\right)<\dfrac{7}{12}+\dfrac{(2x+1)^2}{4}$.

67 $\dfrac{3x-1}{5}-\dfrac{3+x}{2}>x^2-\dfrac{(2x-1)(5x+3)}{10}$.

68 $\dfrac{3x+2}{4}+\dfrac{x-2}{-3}<\dfrac{2+x^2}{2}-\dfrac{(3x+1)(2x-3)}{12}$.

69 $(x-2)(x^2+4+2x)-x(1+x)(x-1)<\dfrac{2x-5}{3}-\dfrac{x+5}{6}$.

70 $(x+2)(4-2x+x^2)-x(x-3)(3+x)<x+\dfrac{x+5}{-3}$.

71 $\dfrac{x(x-1)}{3}-\dfrac{(x+2)(x-3)}{2}<x-\dfrac{(x+1)^2}{6}$.

72 $8(x-1)>8(x+1)$.

73 $12(y-9)-6y<6y-1$.

74 $3x-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\leq x(4-x)$.

75 $\left(1+\dfrac{x}{3}\right)^2<\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{2}{3}x+5$.

76 $2x(2x-3)(3+2x)-(2x-1)^3>12x(x-2)-5$.

77 $(2x-1)^3-8x(x-2)(x+2)+12x(x-3)<2x$.

78 $(2x+3)^2-(x+6)^2\geq(2x+1)^2-(x+4)(x-4)$.

79 $(3x-2)^2-(x-5)^2\leq(2x+5)(4x-3)$.

80 $(2x-5)^2-(x+4)^2\geq(3x-2)(x+4)-3(x+1)$.

81 $(3x+1)^2-(2x+3)^2\leq(5x+3)(x-4)-2(x+1{,}5)$.

82 $(2x-7)^2-(x-4)^2\geq(3x-5)(x+2)-5(x+1{,}2)$.

83 $(3x-4)^2-(2x-5)^2\geq(5x-3)(x+3)-4(x+2{,}5)$.

84 $(2x+5)^2-(-x-3)^2\geq(3x-4)(x+2)-5(x+1{,}6)$.

85 $(3x+2)^2-(2x+7)^2\leq(5x-9)(x+4)-6(x+1{,}5)$.

86 $(4x+1)^2-(3x+2)^2\geq(7x-3)(x+2)-4(x+2{,}5)$.

87 $(4x+3)^2-(3x+4)^2\leq(7x+2)(x-5)-5(x+1{,}6)$.

88 $(2x+7)^2-(-2x+5)^2\geq(x+4)^2-(-x-3)^2$.

89 $(x+1)^3-x(x^2+3x+5)\leq 5(x+4)$.

90 $(x+2)^3-x(x+1)(x-1)\geq$
$\geq(3x-4)(2x-5)-3(x+5)$.

91 $(x-2)^3-x(x+3)(x-3)\leq$
$\leq(3x-2)(5-2x)-4(x+1{,}25)$.

92 $(x+2)^3-(x+1)^3\geq(3x-4)(x+5)-7(x+2)$.

93 $(x+1)^3-(x-1)^3\leq(3x-5)(2x+1)-5(x+4)$.

94 Докажете, че всяко число е решение на неравенството $3x(2+3x)>6x-1$.

95 Докажете, че са еквивалентни неравенствата

$35x-8(3x+2)<7x-5(12-3x)$ и

$5(x-1)^2-2(x+3)^2>3(x+2)^2-7(6x-1)$.

В лявата колона на бланката за отговори е написана буквата на неравенството. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на еквивалентното му неравенство.

96

(А)	$\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}>\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}$
(Б)	$\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{x-2}{4}<\dfrac{5}{6}$
(В)	$x-\dfrac{x}{3}>3+\dfrac{x}{2}$

(1)	$3(x-5)>2(x+1{,}5)$
(2)	$3(x-3)<6-(x+4)$
(3)	$5-2(x+1)>9$
(4)	$\dfrac{x+2}{3}>\dfrac{5-x}{4}$
(5)	$5(x+1)+1<2(x+3)$

Отг.

(А)	
(Б)	
(В)	

97

(А)	$3\left(2-\dfrac{x+6}{3}\right)<x$
(Б)	$5(x-2)-2(x+7)>4(x-5)$
(В)	$\dfrac{x+2}{2}-\dfrac{x+3}{3}<\dfrac{2x+5}{6}$

(1)	$\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}<3$
(2)	$x+3>\dfrac{x-3}{4}$
(3)	$1-\dfrac{x+5}{2}>x$
(4)	$2\left(2-\dfrac{x+3}{2}\right)>5$
(5)	$\dfrac{x-4}{4}>\dfrac{x-5}{5}$

Отг.

(А)	
(Б)	
(В)	

98

(А)	$7(x-2) > 5(x+2)$
(Б)	$5(x+4) < 3(x+8)$
(В)	$7x - 24 > 5(x-2)$

(1)	$\frac{2x+7}{7} > 3$
(2)	$\frac{x}{3} < \frac{x+4}{2}$
(3)	$\frac{x+1}{3} < \frac{x+2}{4}$
(4)	$\frac{x+11}{2} > 2$
(5)	$\frac{x-2}{2} > \frac{x+3}{3}$

Отг.

(А)	
(Б)	
(В)	

99

(А)	$\frac{x+4}{2} < \frac{x+3}{3}$
(Б)	$\frac{2x+5}{2} > \frac{x+3,5}{3}$
(В)	$\frac{x+5}{2} - \frac{x}{3} < 2$

(1)	$15 - 2(x+3) < x$
(2)	$5x - 3 > 7x + 3$
(3)	$14 - 3(x+2) < x$
(4)	$9 - 2x > 7 - 3x$
(5)	$\frac{x-2}{2} > \frac{2x}{3}$

Отг.

(А)	
(Б)	
(В)	

100

(А)	$\frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} < 1$
(Б)	$x - \frac{x+5}{5} > 3$
(В)	$1 - \frac{2x+3}{3} < x$

(1)	$3(x-2) > 2x + 1$
(2)	$5x - 7 < 3x - 1$
(3)	$\frac{x+6}{3} < 1$
(4)	$3x + 4 < 4x - 1$
(5)	$\frac{3x+4}{4} > 1$

Отг.

(А)	
(Б)	
(В)	

101

(А)	$5(x-1,2) > 2(x+4,5)$
(Б)	$4(x+1,5) < 3(x-3)$
(В)	$5(x+0,6) > 2(x-3)$

(1)	$\frac{2x+1}{3} < x + 2$
(2)	$\frac{3x-1}{2} < 2x + 1$
(3)	$\frac{x+9}{3} > 4$
(4)	$\frac{x+1}{2} > \frac{x+4}{3}$
(5)	$\frac{x+7}{2} < -4$

Отг.

(А)	
(Б)	
(В)	

НИВО Б → ЗАДАЧИ ЗА ОТЛИЧНА ПОДГОТОВКА

102 Намерете:

а) целите положителни числа a, за които е вярно неравенството $a < 5$;

б) целите отрицателни числа b, за които е вярно неравенството $b > -6$;

в) естествените числа n, за които е вярно неравенството $n < 7$;

г) двуцифрените числа c, за които е вярно неравенството $c > 93$.

103 Намерете целите числа, за които:

а) $2 < x < 8$; б) $0 < x < 10$;

в) $-3 < x < 5$; г) $-8 < x < -1$.

104 Намерете целите числа, за които:

а) $3 < x \le 9$; б) $1 \le x \le 7$;

в) $-4 \le x < 3$; г) $-9 \le x \le 0$.

105 Като използвате свойствата на числовите неравенства, от първото неравенство получете второто:

а) $a > 4 \rightarrow a + 3 > 7$;

б) $a < 2 \rightarrow 2a + 5 < 9$;

в) $a > 2 \rightarrow 5 - 3a < -1$;

г) $a > 4 \rightarrow \frac{a}{2} - 3 > -1$.

106 Докажете, че ако $3a < -2$, то $3a < 0$.

107 Докажете, че ако $a > b$, то верни са и неравенствата:

а) $a + 7 > b + 1$; б) $2a + 5 > 2b + 5$.

108 Нека $a < b$. Сравнете двата числови израза $\frac{a}{3} - 1$ и $\frac{b}{3} - 1$.

109 Вярно ли е, че ако $a < 2$, то $2a < 15$?

110 Сравнете числото a с числото 0, ако:

а) $-5a < -6$;
б) $-3a > -a$;
в) $5a > -4a$.

111 Докажете, че за всяко $m \neq 0$ са верни неравенствата:

а) $(1 + m)^2 > 1 + 2m$;

б) $(2 + 3m)^2 > 4(3m + 1)$.

112 Докажете, че за всяко a и b са верни неравенствата:

а) $a(a + 3b) \geq 3ab$;
б) $4a^2 - 9ab + 9b^2 \geq 3ab$.

113 Докажете, че сборът от квадратите на две последователни естествени числа е поголям от удвоеното им произведение.

114 Докажете, че:

а) ако $a > -1$, то $a^3 - a^2 \geq a - 1$;
б) ако $a < -1$, то $a^3 - a^2 \leq a - 1$.

115 Определете за кои стойности на x изразът $A = 2x^2 - 2(x^2 - 2x + 6)$ е:

а) положителен;
б) отрицателен;
в) неположителен;
г) неотрицателен.

116 Проверете кои от числата -2; -1; 0; $1{,}9$; 7; $7{,}9$; 8; $11{,}5$; 100 са решения на неравенството:

а) $4(x - 5) - 8 > 0$;
б) $3(x + 2) - 4(x + 1) > 0$.

117 Докажете, че са еквивалентни неравенствата

$3(x + 2) < 2$ и $3(x^2 - x + 1) - 5 > 2 + 3x^2$.

118 Намерете най-малкото цяло число, което е решение на неравенството:

а) $5(x - 2) - 7 > 3(x + 1)$;

б) $3(2x - 1) - 2(x + 4) < 5(x + 3) - 2$;

в) $3(x + 2) - 5(x + 6) < 2(2x + 1) - 5$;

г) $\frac{x+5}{3} - \frac{x-2}{2} > 1 - \frac{3x+8}{6}$.

119 Намерете най-голямото цяло число, което е решение на неравенството:

а) $4(x - 3) + 3 < 2(x + 3) - 1$;

б) $3(x + 2) - 5 > 4(x - 1) + 3$;

в) $\frac{x-1}{5} - \frac{x+5}{2} > 1 - \frac{x+3}{10}$;

г) $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{4} > \frac{x+5}{6} - \frac{x+3}{12}$.

120 Дадено е неравенството

$3\left(3x - \frac{2}{3}\right) + x < 3(x + 8)$. Намерете:

а) сбора от естествените числа, които са решения на това неравенство;

б) отрицателните едноцифрени числа, които са решения на това неравенство;

в) едноцифрените числа, които са решения на това неравенство;

г) целите числа, по-големи или равни на -2, които са решения на това неравенство.

Решете линейните неравенства:

121 $\frac{2x-7}{-3} - 1\frac{1}{3}\left(\frac{2x+5}{4} - \frac{x+8}{2}\right) > 1 - \frac{3x+1}{2}$.

122 $\frac{2x+7}{2} - 1\frac{1}{6}\left(\frac{3x+1}{7} + \frac{x+5}{-14}\right) < 1\frac{1}{2} - \frac{x+8}{12}$.

123 $\frac{2x+1}{-3} - 1{,}5 \, . \left(\frac{2x+7}{6} - \frac{x+9}{9}\right) < 2\frac{1}{3} - \frac{x+8}{6}$.

124 $\frac{3x+1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{x+5}{2} - \frac{x+1}{4}\right) > \frac{x+8}{-6} + 1$.

125 $\frac{3x-7}{-5} - \frac{x+1}{3} < 2 - 0{,}8 \, . \left(\frac{x+1}{2} - \frac{x+7}{4}\right)$.

126 $\frac{x-4}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+1}{3} - \frac{x-3}{2}\right) > 5 - \frac{x-3}{12}$.

127 $\frac{x+3}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2x-3}{2} - \frac{x-1}{4}\right) < 6 - \frac{2x+1}{12}$.

128 $\frac{2x-1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-1}{6}-\frac{2x-3}{3}\right)>2x-\frac{x+2}{36}$.

129 $\frac{3x+1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3x-1}{3}-\frac{2x+7}{6}\right)<x+\frac{5x+8}{-4}$.

130 $\frac{3x+8}{6}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x+5}{2}-\frac{x+7}{3}\right)>x+\frac{2x-1}{-3}$.

131 $\frac{3x-1}{4}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3x-5}{4}-\frac{2x+9}{2}\right)<x-\frac{5x-11}{6}$.

132 $\frac{2x+5}{3}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x-5}{6}-\frac{x+3}{2}\right)>2x-\frac{x+1}{9}$.

133 $\frac{3x-1}{2}-\frac{2}{3}\cdot\left(6-\frac{x+3}{2}\right)<3+\frac{x-5}{-6}$.

134 $\frac{5x+3}{2}-\frac{3}{4}\cdot\left(8+\frac{2x-1}{-3}\right)>5x-\frac{x-3}{6}$.

135 $\frac{5x-1}{15}-1\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{x+5}{6}-\frac{x+2}{12}\right)<x-\frac{x+8}{3}$.

136 $\frac{3x-1}{5}-1\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x+1}{5}-\frac{3x+1}{10}\right)>2x-\frac{x+7}{3}$.

137 $\frac{5x-1}{3}-1\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x+5}{4}-\frac{x-2}{2}\right)<1+\frac{x+9}{-4}$.

138 $\frac{x+7}{4}-1\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3x-1}{5}-\frac{x+8}{10}\right)<x+\frac{3x+1}{-3}$.

139 $\frac{2x+9}{3}-1\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2x+5}{8}-\frac{x+7}{4}\right)>x-\frac{3x-2}{4}$.

140 $\frac{(2-x)^2}{3}-\frac{(-x-1)^2}{2}<x+\frac{(x+3)(x-2)}{-6}$.

141 $\left(\frac{2x-3}{2}\right)^2-1\frac{2}{3}\left(\frac{x+1}{5}-\frac{3x+9}{10}\right)<(-x-1,5)^2$.

142 $\frac{3x-2}{2}-\frac{(x+5).x}{3}<1-\frac{5+3x+2x^2}{6}$.

143 $\frac{2x-5}{3}-\frac{(x-2)(x+3)}{2}<1-\frac{(3x-2)(x+1)}{6}$.

144 $\left(\frac{x+3}{2}\right)^2-\frac{x(x+5)}{3}>1+\frac{(2-x)(2+x)}{12}$.

145 $\left(\frac{-3x+1}{2}\right)^2-\frac{(4x+5)(x-2)}{2}<2x+\frac{(3-x)^2-6}{4}$.

146 $\frac{2x+\frac{1}{3}}{4}-\frac{3x-\frac{1}{2}}{2}<\frac{x+0,5}{3}+\frac{2x+\frac{1}{6}}{2}$.

147 $\frac{(1-3x)^2}{22}-\frac{(3-x)(3+x)}{11}<$

$<\frac{(5x-1)(2x+1)}{22}-\frac{1-\frac{x^2}{2}}{11}$.

148 $(-x-4)^2-(x-2)^2-\frac{14x+3}{2}>2x$.

149 $(x-2)(x^2+2x+4)-(x-1)^3-3x(x-1)<2\cdot$

150 $x(x-2)(x+2)-(x-3)(x^2+3x+9)>5x-1$.

151 $(x+2)^3-x(x+5)(x+1)\leq 3x+8$.

152 $(2x-1)^3-8x(x-2)(x+2)+12x(x-3)<2x$.

153 $\frac{2x-1}{7}-\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{5}+\frac{5x-1}{2}\right)\leq 1+\frac{x+5}{-14}$.

154 $\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2-(3x-1,5)\frac{1}{3}-\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+0,5)<5+2x$.

155 $(x+1)^2+\frac{(x-1)^2+x^2}{2}>x^2+(x-1)^2$.

156 $(2x-1)(2x+1)-(1-x)(1+x+x^2)<$

$<(x-2)^3+5x(2x-2,4)+2$.

157 $\frac{1}{2}\left(1-\frac{4-x}{4}\right)+\frac{x-2}{-3}<\frac{2-x}{6}-\frac{x}{24}$.

158 $\left(2-\frac{x}{3}\right)^2-\frac{x}{1,2}<\left(\frac{x}{3}+2\right)^2-3,5x+3$.

159 $\left(2+\frac{x}{3}\right)^2-\frac{x-1}{0,2}<\frac{x}{3}\left(4+\frac{x}{3}\right)-5x+10$.

160 $\frac{x-3}{4}-2\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-x}{3}\right)>1-\frac{1}{3}\left(\frac{7x}{4}-2\right)$.

161 $\frac{x-\frac{1}{3}(4x-9)}{6}-\frac{1}{9}(x-2)<\frac{1-x}{6}$.

162 $\left(\frac{x+3}{-2}\right)^2-3(x-1)>\frac{x+2}{2}\cdot\frac{x-2}{2}-5$.

163 $\left(\frac{x-3}{3}\right)^2-3(x+2)<\frac{x+1}{3}\cdot\frac{x-1}{3}+6$.

164 $\left(\frac{2x+1}{-2}\right)^2-3(x+4)<(-x-2)^2+2,25$.

165 $\left(\frac{3x-2}{3}\right)^2-\frac{7x+1}{9}<(x-1)^2$.

166 $\left(\frac{4x+3}{-4}\right)^2-(x+3)(x-2)>\frac{2x+45}{16}$.

167 $\left(\frac{x+2}{2}\right)^2-\left(\frac{x+1}{-3}\right)^2<\frac{5x+4}{3}\cdot\frac{x+8}{12}$.

168 $(x+1)^3-(3x+2)(x+1)>(x-2)(x^2+2x+4)$.

169 $(x-1)^3-(x+3)(1-3x)<(x+2)(x^2-2x+4)$.

170 $(x+2)^3-(x+1)^3>(3x-2)(x+4)$.

171 $(x-2)^3-(x-1)^3<(2-3x)(x+2)$.

172 $(x+1)^3-(x-1)^3>(3x+2)(2x-3)$.

173 $(2x+1)^3-8x(x+2)(x-2)<(3x-5)(4x+1)$.

174 $(2x-1)^3-2x(2x+3)(2x-3)>(2-3x)(4x+5)$.

175 $(2x+3)^3-8x(x+1)(x-1)<(6x-5)^2$.

176 $(2x-3)^3-2x(2x+1)(2x-1)>(5+6x)(1-6x)$.

177 $(2x+3)^3-(2x+1)^3<(6x+3)(4x-3)$.

178 Намерете най-малкото цяло число, което е решение на неравенството:

а) $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x+1}{3}>1$;

б) $\dfrac{(2x+1)^2}{2}+\dfrac{x-5}{5}>\dfrac{3x}{2}-\dfrac{4}{5}+2x^2$.

179 Намерете естествените числа, които са решения на неравенството

$$\frac{x-2}{7}-\left(x-\frac{9x+7}{2}\right)\le 36.$$

180 Намерете целите отрицателни числа, които са решения на неравенството

$$\frac{y}{-12}+\frac{5y}{-3}\le 2.$$

181 Намерете най-голямото цяло число, което е решение на неравенството

$$\frac{y}{0,5}-\frac{y}{0,2}>1-y.$$

182 Намерете най-голямото цяло число, което е решение на неравенството

$$x(2x-1)+\frac{1}{3}(18x-6)<\frac{1}{2}(2x+4)+2x^2,$$

заключено между числата $-5\frac{1}{2}$ и -1.

В лявата колона на бланката за отговори е написана буквата на неравенството. Срещу нея, в дясната колона, запишете номерата на уравненията, чиито корени са решения на неравенството.

183

(А)	$-3x+4\le 2x-6$
(Б)	$\dfrac{x-4}{-2}>1$
(В)	$(x+2)^2-x(x+6)\le 4$

(1)	$(x-1)(x-3)=0$
(2)	$x^2-2x=0$
(3)	$x^2+x=0$
(4)	$x^2=9$
(5)	$\lvert x-4\rvert=2$

Отг.

(А)	
(Б)	
(В)	

184

(А)	$-4x-4<x+6$
(Б)	$\dfrac{x+6}{-4}>-1$
(В)	$(x-3)^2-x(x-4)\ge 9$

(1)	$(x+1)(x+3)=0$
(2)	$x^2-3x=0$
(3)	$x^2+2x=0$
(4)	$x^2=1$
(5)	$\lvert x+6\rvert=3$

Отг.

(А)	
(Б)	
(В)	

185

(А)	$-x+3<x-5$
(Б)	$\dfrac{x-2}{-3}>1$
(В)	$x^2-x(x+6)\le 12$

(1)	$(x+3)(x-5)=0$
(2)	$x^2+2x=0$
(3)	$(x+2)(x+4)=0$
(4)	$x^2=16$
(5)	$\lvert x-8\rvert=3$

Отг.

(А)	
(Б)	
(В)	

186

(А)	$-x-4<3x-8$
(Б)	$\dfrac{x-7}{-3}>1$
(В)	$(x+2)^2\le x(x+8)$

(1)	$(x-1)(x-4)=0$
(2)	$x^2-5x=0$
(3)	$x^2-x=0$
(4)	$x^2=4$
(5)	$\lvert x-7\rvert=5$

Отг.

(А)	
(Б)	
(В)	

187

(А)	$-x-2<4(x-3)$
(Б)	$\dfrac{x+5}{-5}>0$
(В)	$(x-5)^2\le 2x^2-(x+5)(x-5)$

(1)	$(x-3)(x-6)=0$
(2)	$x^2-5x=0$
(3)	$x^2+x=0$
(4)	$x^2=9$
(5)	$\lvert x+8\rvert=1$

Отг.

(А)	
(Б)	
(В)	

188

(А)	$-x+4\ge 3x-16$
(Б)	$\dfrac{x-7}{-4}<2$
(В)	$x^2+8\le x(x+4)$

(1)	$(x-6)(x+1)=0$
(2)	$x^2=4x$
(3)	$x^2+9=0$
(4)	$(x-3)(x-8)=0$
(5)	$\lvert x+7\rvert=2$

(А)	
(Б)	
(В)	

189

(А)	$-x-2\le 5x+10$
(Б)	$\dfrac{x-1}{-5}>1$
(В)	$(x-3)^2\le x(x-5)$

(1)	$(x+6)(x+7)=0$
(2)	$x^2+5x=0$
(3)	$x^2+4=0$
(4)	$x^2=9$
(5)	$\lvert x-12\rvert=2$

Отг.

(А)	
(Б)	
(В)	

190

(А)	$-x+6>5x-18$
(Б)	$\dfrac{x+7}{-3}\le 2$
(В)	$x^2+9<x(x+3)$

(1)	$(x-4)(x-1)=0$
(2)	$x^2=9x$
(3)	$x^2-16=0$
(4)	$(x-4)(x-5)=0$
(5)	$\lvert x+3\rvert=4$

Отг.

(А)	
(Б)	
(В)	

191

(А)	$3x-4<2x-6$
(Б)	$\dfrac{x-5}{-2}>1$
(В)	$(x-1)^2\ge x(x-3)$

(1)	$(x-3)(x+2)=0$
(2)	$x^2+5x=0$
(3)	$x^2-3x=0$
(4)	$4x^2=1$
(5)	$\lvert x+7\rvert=4$

Отг.

(А)	
(Б)	
(В)	

192

(А)	$-3x-5<x-9$
(Б)	$\dfrac{x-9}{-5}>1$
(В)	$(x+2)^2-x(x+8)\le 0$

(1)	$x^2-5x+4=0$
(2)	$x^2+9=0$
(3)	$x^2=x$
(4)	$x^2=4$
(5)	$\lvert 7-x\rvert=5$

Отг.

(А)	
(Б)	
(В)	

В лявата колона на бланката за отговори е написан номерът на твърдението. Срещу всеки номер запишете „ДА”, ако твърдението е вярно за даденото неравенство, или „НЕ”, ако твърдението не е вярно.

193 Дадено е неравенството
$$\frac{x+3}{3}\cdot\frac{3-x}{2}-\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-1}{-3}<3.$$

№	Твърдение
(1)	Произведението на целите отрицателни числа, които са решение на неравенството, е 24.
(2)	Най-малкото цяло число, което е решение на неравенството, е –3.
(3)	Най-голямото цяло число, което не е решение на неравенството, е – 4.
(4)	По-малкият корен на уравнението $\lvert x+4\rvert=3$ е решение на неравенството.
(5)	По-големият корен на уравнението $x^2-2x=8$ е решение на неравенството.

Отг.

№	Вярно ли е твърдението?
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

194 Дадено е неравенството
$$(x^2-x-1)^2-x^2(x^2-2x-1)<9.$$

№	Твърдение
(1)	Сборът от естествените числа, които са решение на неравенството, е 6.
(2)	Най-голямото цяло число, което е решение на неравенството, е 4.
(3)	Най-малкото цяло число, което не е решение на неравенството, е 5.
(4)	По-малкият корен на уравнението $x^2-4x=0$ е решение на неравенството.
(5)	По-големият корен на уравнението $x^2-16=0$ е решение на неравенството.

Отг.

№	Вярно ли е твърдението?
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

195 Дадено е неравенството
$$\frac{x(x+4)}{2}-1\frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{2}-\frac{3x^2}{8}\right)-\left(\frac{-2x-1}{2}\right)^2<\frac{7}{12}.$$

№	Твърдение
(1)	Броят на естествените числа, които са решение на неравенството, е 4.
(2)	Най-голямото цяло число, което е решение на неравенството, е 4.
(3)	Най-малкото цяло число, което не е решение на неравенството, е 5.
(4)	Корените на уравнението $x^2-4x+3=0$ са решения на неравенството.
(5)	Неравенството $9-2x<0$ е еквивалентно на даденото неравенството.

Отг.

№	Вярно ли е твърдението?
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

196 Дадено е неравенството
$$\left(\frac{x}{4}-5\right)\left(\frac{x}{5}+4\right)-\frac{x+5}{2}\cdot\left(\frac{3x}{5}-\frac{x+1}{2}\right)\le x-20.$$

№	Твърдение
(1)	Произведението от естествени числа, по-малки от 6, които са решения на неравенството, е равно на 120.
(2)	Най-малкото цяло число, което е решение на неравенството, е 2.
(3)	Най-голямото цяло число, което не е решение на неравенството, е 0.
(4)	Корените на уравнението $(4x-5)(2x-7)=0$ са решения на неравенството.
(5)	По-големият корен на уравнението $(x+2)(x+4)=8$ е решение на неравенството.

Отг.	№	Вярно ли е твърдението?
	(1)	
	(2)	
	(3)	
	(4)	
	(5)	

НИВО В → ЗАДАЧИ ЗА СЪСТЕЗАНИЯ

197 Намерете сбора на естествените числа, които са решения на неравенството

$x(x-3)-(-x+1)^2>-6$.

Решение: $x(x-3)-(-x+1)^2>-6$

$x^2-3x-(x^2-2x+1)>-6$

$x^2-3x-x^2+2x-1>-6$

$-x>-5$

$x<5$

Естествените числа, които са решения на неравенството, са 1; 2; 3; 4. Сборът им е 10.

198 Докажете, че всяко число x е решение на неравенството

$(x-1)^3-x(x-2)(x+2)+(2x+1)^2\geq 9x-1$.

Решение:

$x^3-3x^2+3x-1-x^3+4x+4x^2+4x+1\geq 9x-1$

$x^2+2x+1\geq 0$

$(x+1)^2\geq 0$

Това неравенство е изпълнено за всяка стойност на x, т.е. всяко x е решение на даденото неравенство.

199 Докажете неравенствата:

а) $(3a+b)(3b+a)>16ab$ за всяко $a\neq b$;

б) $4(a^3-b^3)>(a-b)^3$ за всяко $a>b$;

в) $8a^3-4a^2>2a-1$ за всяко $a>-\frac{1}{2}$ и $a\neq\frac{1}{2}$.

Решение:

а) Образуваме разликата

$(3a+b)(3b+a)-16ab=3(a-b)^2>0$

за всяко $a\neq b$, защото $(a-b)^2>0$ за всяко $a\neq b$

$\Rightarrow(3a+b)(3b+a)>16ab$ за всяко $a\neq b$.

б) Образуваме разликата

$4(a^3-b^3)-(a-b)^3=3a^3-3b^3+3ab(a-b)=$

$=3(a-b)(a^2+ab+b^2+ab)=$

$=3(a-b)(a+b)^2$.

От $a>b\Rightarrow a-b>0$.

$(a+b)^2>0$ за всяко $a>b$.

Тогава $3(a-b)(a+b)^2>0$

$\Rightarrow 4(a^3-b^3)>(a-b)^3$ за всяко $a>b$.

в) Образуваме разликата

$8a^3-4a^2-(2a-1)=(2a-1)(4a^2-1)=$

$=(2a-1)^2(2a+1)$

От $a>-\frac{1}{2}\Rightarrow a+\frac{1}{2}>0\Rightarrow 2a+1>0$.

От $a\neq\frac{1}{2}\Rightarrow(2a-1)^2>0$.

Тогава $(2a-1)^2(2a+1)>0$

$\Rightarrow 8a^3-4a^2>2a-1$

за всяко $a>-\frac{1}{2}$ и $a\neq\frac{1}{2}$.

200 Докажете, че ако $a^2+b^2=c^2$, то $ab+bc+ac\leq 2c^2$.

Решение:

$ab+bc+ac\leq 2c^2\Leftrightarrow 2ab+2bc+2ac\leq 4c^2$

Образуваме разликата

$\underbrace{2ab+2bc+2ac}-\underbrace{4c^2}=$

$=2ab+2bc+2ac-c^2-c^2-2(a^2+b^2)=$

$=2ab+2bc+2ac-c^2-c^2-a^2-a^2-b^2-b^2=$

$=-((a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2)$.

$(a-b)^2\geq 0,\ (b-c)^2\geq 0,\ (a-c)^2\geq 0$ за всяка стойност на a, b, c.

Тогава

$-((a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2)\leq 0$, т.е.

$2ab+2bc+2ac\leq 4c^2\quad |:2$

$ab+bc+ac\leq 2c^2$.

201 Докажете, че ако $x>3$, то $x^3-3x^2>9x-27$.

Решете неравенствата:

202 $(x-2)(4+x^2+2x)+(-3x-4)^2>(2+x)^3+3x^2$.

203 $(x+3)(x^2-3x+9)-x(x+2)(x-2)<2(x+3{,}5)$.

204 $(2x+3)^3-(2x-1)^3<(6x+1)(8x+1)-7$.

205 $(2x+1)(4x^2-2x+1)-2x(2x+3)(2x-3)<5x+8$.

206 $(-2x+1)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2<3x(x-1)+2,75$.

207 $(x+1)^3+(x^2+x+1)(1-x)<$

$$<\left(\frac{-2x-1}{2}\right)^2+\left(\frac{2x-1}{-2}\right)^2+x^2+8.$$

208 $\frac{2x-1}{1,2}-\frac{3x+1}{1\frac{1}{3}}>\frac{2x-1}{0,25}+\frac{3x-0,5}{2}$.

209 $\frac{3x-1}{0,2}-\frac{2x+1}{\frac{2}{3}}\le\frac{5x-\frac{1}{3}}{0,5}+1$.

210 $\left(-x-\frac{1}{3}\right)^2<\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\frac{1}{9}$.

211 $\left(\frac{2x+1}{-2}\right)^2>\left(\frac{-3x-1}{3}\right)^2$.

212 $\left(\frac{-x-3}{2}\right)^2-\left(\frac{x-1}{-3}\right)^2<\frac{5x^2+60x+7}{36}$.

213 $\left(\frac{x+2}{-2}\right)^2-\left(\frac{x+1}{-3}\right)^2<\frac{x}{12}-\frac{x-2}{6}\cdot\frac{5x+1}{-6}$.

214 $3\frac{2}{3}-\frac{2-x}{2}\left(\frac{x^2+2}{2}-\frac{x^2-x+1}{3}\right)<\frac{x}{3}\left(\frac{x}{2}+3\right)\left(\frac{x}{2}-3\right)$.

215 $\frac{2x^2-1}{-2}-\frac{1}{3}\left(2+\frac{3x-4}{2}\right)<\frac{(x-1)^3+(-x-1)^3-1}{6}$.

216 Намерете най-малкото цяло число, което е решение на неравенството

$(x^2-3)(x^2+3)-(x^2-2)(x^2+2)<x$.

217 Намерете най-малкото естествено число, което е решение на неравенството

$$20-\frac{5+x}{2}\cdot\left(\frac{3x}{5}-\frac{x+1}{2}\right)\le-\left(\frac{x}{4}-5\right)\left(4+\frac{x}{5}\right)+x.$$

218 Намерете най-голямото цяло число, което е решение на неравенството

$$18+\frac{x+2}{-3}\cdot\left(\frac{x+4}{2}+\frac{x+5}{-3}\right)>\left(\frac{x}{9}+2\right)\left(9-\frac{x}{2}\right).$$

219 Да се реши неравенството

$$\frac{(1+x)(x-1)}{3}+\frac{2(2x+5)^2-64}{-24}\le\frac{5x+1}{2}$$

и да се провери дали числото

$A=\frac{3^{2004}+72.3^{2002}}{27.3^{2003}}$ е решение на това неравенство.

220 Докажете, че неравенствата

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}(x+1)^2\le\frac{1}{6}x(x+1)-\frac{7}{12}$$ и

$(x-1)^3-x^2(x+5)>3x^2-1+3x$ са еквивалентни.

Решете неравенствата:

221 $(x^2+1)(x-5)<0$.

222 $2(x^2+4)(x+3)>0$.

223 $x^3+5x>0$.

224 $x^3-4x^2+x-4>0$.

225 $x^3-2x^2+5x-10<0$.

226 $(2x-1)^3+4(2x-1)<0$.

227 $(x-1)^3+x(x+4)-13>0$.

228 $x(x-2)(x+2)-x(x-12)-8<0$.

229 $(x+2)^3-6(x-5)<2$.

230 $x^3+6x^2+9x>0$.

231 $x^3-4x^2+4x<0$.

232 $(5x-1)^3+9(5x-1)>0$.

233 $(2x-7)^3+5(2x-7)<0$.

234 $(3x-1)^3-5(1-3x)>0$.

235 $(2x-1)^3-4(1-2x)<0$.

236 $(2-3x)^3+5(2-3x)>0$.

237 $(5-2x)^3+7(5-2x)<0$.

238 $(4-5x)^3-9(5x-4)>0$.

239 $(7-2x)^3-13(2x-7)<0$.

240 $x^3+4x^2+7x<0$.

241 $x^3-6x^2+13x>0$.

242 $x^3-3x^2+5x-15>0$.

243 $2x^3-8x^2+x-4>0$.

244 $3x^3-15x^2+x-5\le0$.

245 $4x^3+8x^2+3x+6\le0$.

246 $(x+3)^2+3x^2+5>0$.

247 $(2x-1)^2+3x^2+1<0$.

248 $x^2+|3x-1|+5>0$.

249 $(3x-1)^2+|3x-1|+2<0$.

II. Неравенства в триъгълника

НИВО А → ЗАДАЧИ ЗА ВСИЧКИ УЧЕНИЦИ

250 Сравнете страните в $\triangle ABC$, ако:
а) $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 5 : 4$;
б) $\alpha : \beta : \gamma = 5 : 7 : 5$;
в) $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 20 : 3$.

251 Сравнете страните в $\triangle ABC$, ако $\gamma = 70°$ и:
а) β е с 60% по-малък от γ;
б) β е 60% от γ.

252 Сравнете височините в $\triangle ABC$, ако $\alpha = 50°$ и $\gamma = 90°$.

253 В $\triangle ABC$ ъгълът при върха A е тъп. Докажете, че височината от който и да е връх на триъгълника е по-малка от всяка от страните, излизащи от същия връх.

254 Сравнете страните на равнобедрен $\triangle ABC$ с основа AB, ако един от ъглите му е:
а) 20°; б) 60°;
в) 90°; г) 150°.

255 Сравнете страните на равнобедрен $\triangle ABC$ с основа AB, ако един от външните му ъгли е:
а) 20°; б) 60°;
в) 90°; г) 120°.

256 Даден е равнобедреният $\triangle ABC$ с основа AB. Да се сравнят бедрото и основата на триъгълника, ако:
а) $\sphericalangle A < 60°$; б) $\sphericalangle A = 60°$;
в) $\sphericalangle A > 60°$.

257 Даден е правоъгълният $\triangle ABC$ с хипотенуза AB. Да се сравнят катетите на триъгълника, ако:
а) $\sphericalangle A < 45°$; б) $\sphericalangle A = 45°$;
в) $\sphericalangle A > 45°$.

258 Нека D е произволна точка от основата AB на равнобедрения $\triangle ABC$. Да се докаже, че $CD < CA$.

259 Да се сравнят страните на $\triangle ABC$, ако $\sphericalangle A$ е с 20° по-голям от $\sphericalangle B$ и с 30° по-малък от $\sphericalangle C$.

260 В $\triangle ABC$ страната AC е по-малка от AB с 3 cm и по-голяма от BC с 2 cm. Сравнете ъглите.

261 Да се сравнят ъглите на $\triangle ABC$, ако страната AB е с 5 cm по-голяма от страната BC и с 2 cm по-малка от страната AC.
Упътване:
Сравнете страните на триъгълника.

262 Отговорете на въпроса и обосновете отговора си: Съществува ли триъгълник, ако:
а) $a = 2$ cm, $b = 25$ cm, $c = 2{,}6$ dm;
б) $a = 10$ mm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm;
в) $a : b : c = 2 : 5 : 3$;
г) $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 5 : 3$?

263 Намерете периметъра на равнобедрен триъгълник, ако две от страните му са:
а) 5 cm и 15 cm; б) 2 cm и 4 cm;
в) 8 cm и 10 cm.

264 Даден е $\triangle ABC$, за страните на който е изпълнено $AB : BC : CA = 4 : 3 : 6$. Сравнете ъглите на триъгълника.

265 В $\triangle ABC$ CL е ъглополовяща. Докажете, че $AL < AC$ и $BL < BC$.

266 Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$). На правата AB са взети точките M и N. Докажете, че:
а) ако M е между A и B, то $CM < CA$;
б) ако B е между A и N, то $CN > CA$.

267 В $\triangle ABC$ симетралата на AB пресича страната BC. Докажете, че $AC < BC$.

268 В правоъгълния $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90°$) CD е височина. Ако $AC > BC$, докажете, че:
а) $CD < AD$; б) $CD > BD$;
в) $AD > BD$.

269 Да се докаже, че сборът от височините в триъгълника е по-малък от периметъра му.

270 Даден е $\triangle ABC$, в който CD е височина, а M е произволна точка от отсечката AD. Да се докаже, че $AC > MC$.

271 В $\triangle ABC$ $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 7 : 8$. Симетралата на страната AB пресича страната AC в точка Q. Сравнете отсечките AQ и BC.

272 Даден е $\triangle ABC$, в който $\sphericalangle C = 120°$ и $AC < BC$. Докажете, че $\sphericalangle A > 30°$.

273 Точките P, Q и R лежат съответно на страните AB, BC и AC на $\triangle ABC$. Докажете, че $P_{\triangle PQR} < P_{\triangle ABC}$.

274 В $\triangle ABC$ AM е медиана. Докажете, че ако:

а) $AM > \frac{1}{2}BC$, то $\alpha < 90°$;

б) $AM < \frac{1}{2}BC$, то $\alpha > 90°$.

НИВО Б → ЗАДАЧИ ЗА ОТЛИЧНА ПОДГОТОВКА

275 Ъглополовящите на ъглите при върховете A и B на $\triangle ABC$ се пресичат в точка O. Докажете, че AB е най-голямата страна в $\triangle ABO$.

276 Височините, прекарани от върховете A и B на остроъгълния $\triangle ABC$, се пресичат в точка H. Докажете, че $AB > AH$ и $AB > BH$.

277 В $\triangle ABC$ на страната AC е взета точка M, а на правата AB – точка N, така, че A е между N и B. Докажете, че $\sphericalangle CAN > \sphericalangle AMB > \sphericalangle ACB$.

278 Докажете, че $\sphericalangle AOB > \sphericalangle ACB$, ако точката O е вътрешна за $\triangle ABC$.

279 В $\triangle ABC$ $AC < BC$. Докажете, че симетралата на AB пресича страната BC.

280 В правоъгълния $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90°$) CD е височина. Докажете, че $\alpha < \beta$ тогава и само тогава, когато $AD > CD$.

281 Докажете, че всяка страна в $\triangle ABC$ е по-малка от полупериметъра му.

282 В $\triangle ABC$ отсечката CM е медиана. Докажете, че $CM < \dfrac{CA+CB}{2}$.

283 Докажете, че сборът от медианите във всеки триъгълник е по-малък от периметъра му.

284 Ако точката O е вътрешна за $\triangle ABC$, да се докаже, че $OA + OB + OC > p$, където p е полупериметърът на триъгълника.

285 Ъглите на равнобедрения $\triangle ABC$ с основа AB удовлетворяват неравенството $2\sphericalangle BAC > \sphericalangle ACB$. Да се докаже, че $\sphericalangle ACB < 90°$.

286 В $\triangle ABC$ $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 13$. Симетралите на страните AC и BC пресичат страната AB съответно в точките Q и E. Вярно е, че:

А) $AQ > QE > EB$;

Б) $AQ < QE < BE$;

В) $BE < QE < AQ$;

Г) $BE < AQ < QE$.

287 В $\triangle ABC$ $\alpha : \beta : \gamma = 4 : 11 : 3$. Симетралите на страните AB и BC пресичат страната AC съответно в точките M и N. Вярно е, че:

А) $AM < MN < NC$;

Б) $AM > MN > NC$;

В) $MN < AM < NC$;

Г) $MN < NC < AM$.

288 В $\triangle ABC$ симетралата на страната AB пресича страните AB и AC съответно в точките M и N. Докажете, че:

а) $BC < AC$;

б) $P_{\triangle BNC} < P_{\triangle BMC}$.

289 В $\triangle ABC$ симетралата на страната AB пресича страните AB и BC съответно в точките M и Q. Докажете, че:

а) $AC < BC$;

б) $P_{\triangle ACQ} < P_{\triangle ACM}$.

290 Ъглополовящите на $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BAC$ на $\triangle ABC$ се пресичат в точка O. Докажете, че $\sphericalangle AOB > 90°$.

291 Ъглополовящите на външните ъгли при върховете B и C на $\triangle ABC$ се пресичат в точка O. Докажете, че $\sphericalangle BOC < 90°$.

292 Върху страните AB и BC на равностранния $\triangle ABC$ са взети съответно точките M и N. Докажете, че:

а) $CM < BC$; б) $CM > MN$.

293 В $\triangle ABC$ точка Q е произволна точка от страната AB. Докажете, че:

а) $CQ < \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$;

б) $CQ > \frac{1}{2}(AC + BC - AB)$.

294 В $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90°$) CD е височина. Докажете, че $CD < \frac{1}{2}(AC + BC)$.

295 Докажете, че отсечката CD, която съединява върха C на $\triangle ABC$ с точка D от срещуположната му страна, е по-малка от полупериметъра му.

296 В $\triangle ABC$ точките M, N и Q са съответно от страните му AB, BC и CA. Докажете, че $P_{\triangle MNQ} < P_{\triangle ABC}$.

297 В $\triangle ABC$ $\sphericalangle C$ е най-голям. Ако точката M е от страната BC, а точката N – от страната AC, да се докаже, че $MN < AB$.

298 В остроъгълния $\triangle ABC$ CD и AN са височини. Докажете, че периметърът на $\triangle ADC$ е по-голям от периметъра на $\triangle ADN$.

299 В остроъгълния $\triangle ABC$ AQ и CD са височини. Докажете, че:

а) $AC > CD$; б) $AQ > DQ$;

в) $P_{\triangle ACQ} > P_{\triangle DQC}$.

300 Точка D лежи на страната AC на $\triangle ABC$. Докажете, че:

а) ако $BC = CD$, то $\sphericalangle B > \sphericalangle A$;

б) ако $BD = DC$, то $AB < AC$.

301 В $\triangle ABC$ $\alpha + \gamma = \beta$. Ако BD е височина, докажете, че $BD < \frac{1}{2}(AB + BC)$.

302 Даден е $\triangle ABC$ с медиана CM. Докажете, че ако $AC > BC$, то $\sphericalangle MCB > \sphericalangle ACM$.

303 $ABCD$ е квадрат и $AB = a$. Ако точка M е от страната AB, докажете, че $a < DM + MC < 3a$.

304 $\triangle ABC$ е остроъгълен и $\alpha = 70°$. Ако $\beta < \gamma$, докажете, че $\beta > 20°$ и $\beta < 55°$.

НИВО В → ЗАДАЧИ ЗА СЪСТЕЗАНИЯ

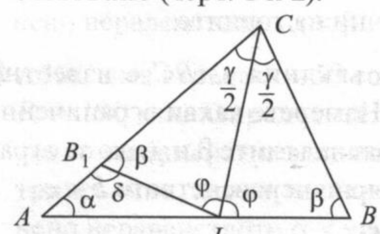
305 Ако $AC > BC$ и CL е ъглополовяща в $\triangle ABC$, докажете, че $\sphericalangle ALC > 90°$.

306 Даден е $\triangle ABC$ с ъгли α, β, γ, а CL ($L \in AB$) е ъглополовяща на $\sphericalangle C$. Докажете, че:

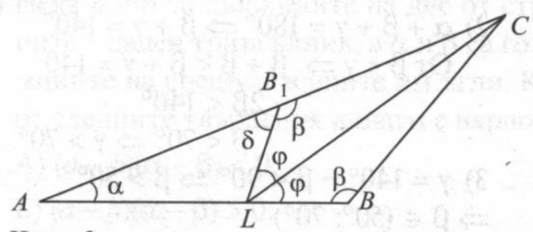
а) ако $AC > BC$, то $AL > BL$;

б) ако $AL > BL$, то $AC > BC$.

Упътване (черт. 1 и 2):



Черт. 1



Черт. 2

I начин:

а) Върху лъча $CA^{\rightarrow}$ построяваме $CB_1 = CB$ (виж черт. 1).

1) $\triangle CLB_1 \cong \triangle CLB$ (I признак)

$\sphericalangle CB_1L = \sphericalangle CBL = \beta$

$\sphericalangle CLB_1 = \sphericalangle CLB = \alpha$

$B_1L = BL$

2) В $\triangle ALB_1$, ако $\delta > \alpha$,

$AL > B_1L = BL$.

3) По условие в $\triangle ABC$ $AC > BC \Rightarrow \beta > \alpha$.

I случай:

$\beta < 90^\circ$, $\delta + \beta = 180^\circ$ (съседни ъгли)

$\Rightarrow \delta > \beta$. Но $\beta > \alpha$ и тогава $\delta > \alpha$

$\Rightarrow AL > BL$.

II случай:

$\beta > 90^\circ$ (тъп ъгъл)

1) $\delta > \varphi$ (външен за $\triangle LB_1C$)

$\Rightarrow 2\delta > 2\varphi$

Но $2\varphi = \alpha + \delta$ (външен за $\triangle ALB_1$)

$2\delta > \alpha + \delta$

$\delta > \alpha \Rightarrow AL > BL$.

б) Използвайте косвено доказателство чрез допускане на противното. Противно на $AC > BC$ са $AC = BC$ и $AC < BC$.

II начин:

Върху лъча CB построяваме $CA_1 = CA$ (точката B е между точките C и A_1). Доказателството се извършва чрез разсъждения, аналогични на горните.

307 За остроъгълния $\triangle ABC$ е известно, че $\alpha = 40^\circ$. Намерете какви ограничения съществуват за ъглите β и γ, ако за страните b и c е вярно неравенството $b < c$.

Решение:

1) От $b < c \Rightarrow \beta < \gamma$.

2) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \beta + \gamma = 140^\circ$

От $\beta < \gamma \Rightarrow \beta + \beta < \beta + \gamma = 140^\circ$

$2\beta < 140^\circ$

$\beta < 70^\circ \Rightarrow \gamma > 70^\circ$.

3) $\gamma = 140^\circ - \beta < 90^\circ \Rightarrow \beta > 50^\circ$

$\Rightarrow \beta \in (50^\circ; 70^\circ)$

$\gamma \in (70^\circ; 90^\circ)$

308 $\triangle ABC$ има страна $a = 8$ cm и периметър $P = 32$ cm. Определете границите, в които се изменят страните b и c на този триъгълник, ако за ъглите β и γ е изпълнено неравенството $\beta < \gamma$.

Решение:

1) От $\beta < \gamma \Rightarrow b < c$.

2) $a + b + c = 32$

$8 + b + c = 32$

$b + c = 24$

$2b < b + c \Rightarrow 2b < 24$

$b < 12$

$b + c < 2c \Rightarrow 2c > 24$

$c > 12$

3) $c < a + b$

$2c < a + b + c$

$2c < P$

$2c < 32$

$c < 16 \Rightarrow c \in (12\text{ cm}; 16\text{ cm})$

4) $b + c = 24$

$c < 16 \Rightarrow b > 8 \Rightarrow b \in (8\text{ cm}; 12\text{ cm})$

309 Докажете, че за всеки триъгълник със страни a, b и c и височини към тях h_a, h_b и h_c са в сила неравенствата:

а) $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} > \dfrac{1}{h_c}$;

б) $\dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} > \dfrac{1}{h_a}$;

в) $\dfrac{1}{h_c} + \dfrac{1}{h_a} > \dfrac{1}{h_b}$.

Решение:

а) 1) От $\dfrac{ah_a}{2} = S$, $\dfrac{bh_b}{2} = S$ и $\dfrac{ch_c}{2} = S$

намираме $a = \dfrac{2S}{h_a}$, $b = \dfrac{2S}{h_b}$, $c = \dfrac{2S}{h_c}$.

2) От

$a + b > c \Rightarrow \dfrac{2S}{h_a} + \dfrac{2S}{h_b} > \dfrac{2S}{h_c} \quad | : 2S > 0$

и получаваме $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} > \dfrac{1}{h_c}$.

310 Външно за $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$) са построени равностранните триъгълници BMC и ACN. Ако $\sphericalangle ABC = 30^\circ$, докажете, че $P_{\triangle AMN} > P_{\triangle ABC}$.

Решение:

1) $\triangle ACM \cong \triangle NCM \Rightarrow AM = NM = x$

$P_{\triangle AMN} = 2x + b$

2) $P_{\triangle ABC} = a + b + c = a + b + 2b = 2 + 3b$

3) Трябва да докажем, че $P_{\triangle AMN} > P_{\triangle ABC}$,

т.е. $2x + b > a + 3b$,

или $2x > a + 2b$.

4) В $\triangle ABM$ $\sphericalangle ABM = 30° + 60° = 90°$. Построяваме BQ – медиана.

$BQ = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}x$. В $\triangle ABQ$

$AQ + QB > AB$, $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} > 2b$

$x > 2b$

$x > a$.

В $\triangle BQM$ $BQ + QM > BC$, $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} > a$

$\Rightarrow 2x > a + 2b \Rightarrow P_{\triangle AMN} > P_{\triangle ABC}$.

311 Нека a и b са дължините на две от страните в даден триъгълник, а α и β – мерките на срещулежащите им ъгли. Да се докаже, че $(a - b)(\alpha - \beta) \geq 0$.

Решение:

Ако $a = b$, то $(a - b)(\alpha - \beta) = 0$ (тогава триъгълникът е равнобедрен и имаме също $\alpha = \beta$).

При $a > b$ получаваме $\alpha > \beta$, понеже срещу по-голяма страна лежи по-голям ъгъл. Тогава $a - b > 0$, $\alpha - \beta > 0$ и следователно $(a - b)(\alpha - \beta) > 0$. Накрая от $a < b$ следва $\alpha < \beta$. В този случай $a - b < 0$, $\alpha - \beta < 0$ и отново получаваме $(a - b)(\alpha - \beta) > 0$.

312 Нека a, b, c са дължините на страните в произволен триъгълник, а α, β, γ – градусните мерки на срещулежащите им ъгли. Да се докаже, че $\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} \geq 60°$.

Решение:

В задача 311 се убедихме, че
$(a - b)(\alpha - \beta) \geq 0$.

Аналогично
$(b - c)(\beta - \gamma) \geq 0$, $(c - a)(\gamma - \alpha) \geq 0$.

Записваме тези три неравенства във вида

$a\alpha + b\beta \geq a\beta + b\alpha$,

$b\beta + c\gamma \geq b\gamma + c\beta$,

$c\gamma + a\alpha \geq c\alpha + a\gamma$

и ги събираме почленно. Получаваме

$2(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq a(\beta + \gamma) + b(\gamma + \alpha) + c(\alpha + \beta)$.

Но $\beta + \gamma = 180° - \alpha$, $\gamma + \alpha = 180° - \beta$, $\alpha + \beta = 180° - \gamma$. Ето защо

$2(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq$

$\geq a(180° - \alpha) + b(180° - \beta) + c(180° - \gamma) =$

$= (a + b + c)180° - (a\alpha + b\beta + c\gamma)$.

Оттук $3(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq (a + b + c)180°$

или $\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} \geq 60°$.

313 $\triangle ABC$ е остроъгълен и има ъгъл $\gamma = 45°$. Определете границите, в които се изменят ъглите α и β на този триъгълник, ако за страните a и b е вярно неравенството $a < b$.

314 $\triangle ABC$ е остроъгълен и има ъгъл $\alpha = 30°$. Определете границите, в които се изменят ъглите β и γ на този триъгълник, ако $\beta < \gamma$.

315 $\triangle ABC$ има страна $c = 6$ cm и периметър $P = 30$ cm. Определете границите, в които се изменят страните a и b на този триъгълник, ако за ъглите α и β е изпълнено неравенството $\alpha < \beta$.

316 $\triangle ABC$ има страна $b = 50$ cm и периметър $P = 190$ cm. Определете границите, в които се изменят страните a и c на този триъгълник, ако за ъглите α и γ е изпълнено неравенството $\alpha < \gamma$.

317 Нека a и b са дължините на две от страните в даден триъгълник, а α и β са големините на срещулежащите им ъгли. Кое от следните твърдения винаги е вярно:

А) $(a - b)(\alpha - \beta) < 0$;

Б) $(a - b)(\alpha - \beta) > 0$;

В) $(a - b)(\alpha - \beta) \geq 0$;

Г) $(a - b)(\alpha - \beta) \leq 0$?

318 В $\triangle ABC$ ъгълът при върха C е най-голям. Височините през върховете A и B или техните продължения се пресичат в точка H. Докажете, че:

а) ако $\sphericalangle ACB < 90°$, то $\sphericalangle AHB > 90°$;

б) ако $\sphericalangle ACB > 90°$, то $\sphericalangle AHB < 90°$.

319 CM е медиана в $\triangle ABC$ ($M \in AB$). Докажете, че:

а) ако $CM < \frac{1}{2}AB$, то $\sphericalangle ACB > 90°$;

б) ако $CM > \frac{1}{2}AB$, то $\sphericalangle ACB < 90°$.

320 В правоъгълния $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90°$) CM е медиана и $AC < CM$. Докажете, че $\sphericalangle ABC < 30°$.

321 Да се докаже, че сборът от диагоналите в четириъгълник е по-малък от периметъра му.

322 Да се докаже, че сборът от диагоналите в изпъкнал четириъгълник е по-голям от сбора на всяка двойка срещуположни страни.

Упътване: Нека диагоналите на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка O. Приложете неравенството на триъгълника за $\triangle ABO$ и $\triangle CDO$.

323 Да се докаже, че сборът от диагоналите в изпъкнал четириъгълник е по-голям от полупериметъра му.

Упътване: Използвайте предишната задача.

324 Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, а X – произволна точка. Да се докаже, че сборът $XA + XB + XC + XD \geq AC + BD$.

325 Върху страната AB на $\triangle ABC$ е взета точка M така, че $BM > 2\,AM$ и $\sphericalangle AMC = 120°$. Симетралата на страната BC пресича отсечката CM в точка P така, че $PM = AM$. Докажете, че:

а) $AP < BP$;

б) $\sphericalangle PCB > 45°$;

в) $\sphericalangle CAP > \sphericalangle ACP$.

326 Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ с $\sphericalangle ACB = 120°$. Симетралата на AC пресича страната AB в точка O. Върху правата OC е взета точка D така, че $CD > CB$. Докажете, че:

а) $\sphericalangle CBD > 45°$;

б) $\sphericalangle ADB < 60°$.

327 Върху страната BC на $\triangle ABC$ е взета произволна точка P, а върху страната AB е взета точка M така, че PM е ъглополовяща на $\sphericalangle APB$. Докажете, че периметърът на $\triangle AMC$ е по-голям от периметъра на $\triangle APC$.

328 Даден е $\triangle ABC$ с ъглополовяща AM ($M \in BC$). През точка A е построена права l, перпендикулярна на AM. Докажете, че ако N е произволна точка от l, то периметърът на $\triangle BNC$ е по-голям от периметъра на $\triangle ABC$.

329 Даден е $\triangle ABC$, в който $\sphericalangle ACB = 60°$ и ъглополовящите AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$) се пресичат в точка L. Докажете, че:

а) $AB = AB_1 + BA_1$;

б) $LA + LB + LC > \dfrac{AB_1 + BA_1 + AC + BC}{2}$.