487 Докажете тъждествата:

а) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;

б) $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;

в) $a^7 - b^7 = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$;

г) $a^{2n+1} - b^{2n+1} = (a - b)(a^{2n} + a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 + \ldots + a^2b^{2n-2} + ab^{2n-1} + b^{2n})$,

където n е естествено число.

488 Докажете тъждествата:

а) $a^8 + b^8 = (a + b)(a^7 + b^7) - ab(a^6 + b^6)$;

б) $a^9 + b^9 = (a + b)(a^8 + b^8) - ab(a^7 + b^7)$;

в) $a^{10} + b^{10} = (a + b)(a^9 + b^9) - ab(a^8 + b^8)$.

Разлагане на многочлени на множители

489 Разложете на множители многочлените:

а) $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$;

б) $x^3 - 12x^2 + 25x - 10$;

в) $4m^4 - 8m^2n^2 + 4n^4$.

Решение:

а) $$a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 = a^2(a^4 - a^2 + 2a + 2) = a^2(a^2(a^2 - 1) + 2(a + 1)) =$$
$$= a^2(a + 1)(a^3 - a^2 + 2) = a^2(a + 1)(a^3 - a^2 + 1 + 1) =$$
$$= a^2(a + 1)\big((a + 1)(a^2 - a + 1) - (a + 1)(a - 1)\big) =$$
$$= a^2(a + 1)(a + 1)(a^2 - 2a + 2)$$
$$a^2 - 2a + 2 = ?$$
$$a^2 - 2a + 2 = \underbrace{a^2 - 2a + 1} - 1 + 2 = \mathbf{(a - 1)^2 - (-1)},$$

(-1) не е точен квадрат

$\Rightarrow\ a^2 - 2a + 2$.

Получихме $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 = a^2(a + 1)^2(a^2 - 2a + 2)$.

б) $$x^3 - 12x^2 + 25x - 10 = x^3 - \underbrace{2x^2 - 10x^2} + \underbrace{20x + 5x} - 10 =$$
$$= x^2(x - 2) - 10x(x - 2) + 5(x - 2) =$$
$$= (x - 2)(x^2 - 10x + 5)$$

$$x^2 - 10x + 5 = ?$$
$$x^2 - 10x + 5 = \underbrace{x^2 - 2.5x + 5^2} - 25 + 5 = (x - 5)^2 -$$

20 не е точен квадрат.

Получихме $x^3 - 12x^2 + 25x - 10 = (x - 2)(x^2 - 10x + 5)$.

Обърнете внимание!

При разлагане на многочлените в примерите а) и б) получихме квадратни тричлени, за които проверихме, че не се разлагат с метода на отделяне на точен квадрат. Така доказахме, че сме разложили дадените многочлени на прости множители в множеството на рационалните числа.

490 Разложете на множители израза
$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$.

Решение:

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+b^3-3b^2c+3bc^2-c^3+c^3-3c^2a+3ca^2-a^3=$$
$$=3(\underline{\underline{ab}}^2-\boldsymbol{a^2b}+bc^2-b^2c+\boldsymbol{ca^2}-\underline{\underline{c^2}a})=$$
$$=3(\underbrace{ca^2-a^2b}+\underbrace{ab^2-c^2a}+\underbrace{bc^2-b^2c})=$$
$$=3\left(a^2(c-b)-a(c^2-b^2)+bc(c-b)\right)=$$
$$=3(c-b)(a^2-ac-ab+bc)=$$
$$=3(c-b)(a(a-c)-b(a-c))=$$
$$=3(c-b)(a-c)(a-b)$$

491 Намерете числената стойност на многочлена
$P(x)=x^{17}-12x^{16}+12x^{15}-12x^{14}+\ldots+12x^3-12x^2+12x-1$ при $x=11$.

Решение:

$$P(x)=x^{17}-12x^{16}+12x^{15}-12x^{14}+\ldots+12x^3-12x^2+12x-1=$$
$$=x^{17}-(11+1)x^{16}+(11+1)x^{15}-(11+1)x^{14}+\ldots+(11+1)x^3-(11+1)x^2+(11+1)x-1=$$
$$=(x^{17}-11x^{16})-(x^{16}-11x^{15})+(x^{15}-11x^{14})+\ldots+(x^3-11x^2)-(x^2-11x)+x-1=$$
$$=x^{16}(x-11)-x^{15}(x-11)+x^{14}(x-11)-\ldots+x^2(x-11)-x(x-11)+x-1=$$
$$=(x-11)(x^{16}-x^{15}+x^{14}-\ldots+x^2-x)+x-1$$

Тогава $P(11)=11-1=10$, $P(11)=10$.

492 Числата a и b са различни от 0 и $a^3+2ab^2=3a^2b+6b^3$.
Пресметнете стойността на израза $\dfrac{a-b}{a+b}$.

Решение: Записваме даденото равенство във вида
$a^3+2ab^2-3a^2b-6b^3=0$ и разлагаме лявата страна на множители:
$a^3+2ab^2-3a^2b-6b^3=a^2(a-3b)+2b^2(a-3b)=(a-3b)(a^2+2b^2)$.
$a^2+2b^2>0$ за всяко $a\neq 0$ и $b\neq 0$.
Тогава от даденото равенство $(a-3b)(a^2+2b^2)=0$
получаваме $(a-3b)=0$, т.е. $a=3b$ и $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{3b-b}{3b+b}=\dfrac{2b}{4b}=\dfrac{1}{2}$,
като $a+b=3b+b=4b\neq 0$, защото по условие $b\neq 0$.

493 Да се докаже, че ако $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Решение: От $a+b+c=0 \Rightarrow c=-(a+b)$.

$$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+\left(-(a+b)\right)^3=$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)^3=$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2-(a+b)^2)=$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2-a^2-2ab-b^2)=$$
$$=(a+b)(-3ab)=$$
$$=(-c)(-3ab)=3abc.$$

494 Изведете правило за повдигане на двуцифрени числа в квадрат, ако цифрата на единиците им е 5.

Решение: Двуцифрените числа с цифра на единиците 5 се записват във вида $A = n\,.\,10 + 5$, където n е цифрата на десетиците. Тогава

$$A^2 = (10n+5)^2 = 100n^2 + 100n + 25 =$$
$$= 100n(n+1) + 25, \text{ или}$$
$$A^2 = \underbrace{n(n+1)}.100 + 25.$$

Ще приложим правилото

$$25^2 = 625; \quad 65^2 = 4\,225;$$
$$2.3 \qquad\qquad 6.7$$

Разложете многочлените:

495 $x^2 + 6x + 8.$

496 $a^2 - 3ab - 10b^2.$

497 $y^2 + 8ay + 15a^2.$

498 $a^3 - 3a + 2.$

499 $a^3 - 3a^2 + 4.$

500 $4a^3 - 3a + 1.$

501 $4x^2 - 3x - 1.$

502 $4a^4 - 4a^2b^2 - 3b^4.$

503 $a^2b^2 - ab^2 - ab - a^2.$

504 $x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5.$

505 $3x^2 + xy + 14x + 4y + 8.$

506 $y^2 + 15a^2 + 8ay.$

507 $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x.$

508 $x^3 - 3x^2y - xz^2 + 3xy^2 - y^3 + yz^2.$

509 $x^3 + 9x^2 + 23x + 15.$

510 $x^2 - 5ax + 6a^2 + x - 2a.$

511 $2x^2 + xy - 3y^2 - 2x - 3y.$

512 $a^{2(n+1)} - 3(ab)^{n+1} - 10b^{2(n+1)}.$

513 Разложете на множители израза $ab(a-b) - ac(a+c) + bc(2a+c-b).$

514 Намерете най-малката стойност на тричлена $A = 4x^2 + 4x + 1$ и съответната стойност на променливата x.

Решение: $A = 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$

За всяка стойност на x $(2x+1)^2 \geq 0$.

Най-малката стойност на A е 0 и ще се получи при $2x + 1 = 0$

$$2x = -1$$
$$x = -\frac{1}{2}.$$

Намерихме, че най-малката стойност на A е 0 и се получава при $x = -\frac{1}{2}$.

Числото 28 се дели на 7, защото може да се представи като произведение от множители, единият от които е 7 $(28 = 4\,.\,7)$.

Изразът A се дели на израза B, ако може да се представи като произведение от множители, поне единият от които е B.

515 Докажете, че при всяко цяло число a изразът:

а) $a^3 - a$ се дели на 3;

б) $a^7 - a$ се дели на 7.

Решение:

а) $a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a-1)a(a+1)$

От три последователни числа едното се дели на 3.

Следва, че $a^3 - a$ се дели на 3.

б) $a^7 - a = a(a^6 - 1) = a(a^3 - 1)(a^3 + 1) =$
$= (a-1)a(a+1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$

Числото a може да бъде от вида:

1) $a = 7k$; 2) $a = 7k + 1$;
3) $a = 7k - 1$; 4) $a = 7k + 2$;
5) $a = 7k - 2$; 6) $a = 7k + 3$;
7) $a = 7k - 3$.

В случай 1) a се дели на 7.

В случай 2) $a - 1$ се дели на 7.

В случай 3) $a + 1$ се дели на 7.

В случай 4)

$a^2 + a + 1 = (7k+2)^2 + 7k + 2 + 1 =$
$= 49k^2 + 28k + 4 + 7k + 2 + 1 =$
$= 49k^2 + 35k + 7 = 7(7k^2 + 5k + 1)$,

т.е. $a^2 + a + 1$ се дели на 7.

В случай 5)

$a^2 - a + 1 = (7k-2)^2 - (7k-2) + 1 =$

$= 49k^2 - 28k + 4 - 7k + 2 + 1 =$

$= 49k^2 - 35k + 7 = 7(7k^2 - 5k + 1)$,

т.е. $a^2 - a + 1$ се дели на 7.

В случай 6)

$a^2 - a + 1 = (7k+3)^2 - (7k+3) + 1 = \ldots$

се дели на 7.

В случай 7)

$a^2 + a + 1$ за $a = 7k - 3$ се дели на 7.

Следва, че $a^7 - a$ се дели на 7.

516 Докажете, че многочленът $A = a^2 + 3a + 2$ се дели на $a + 1$.

Решение:

$A = a^2 + 3a + 2 = a^2 + 2a + a + 2 =$

$= a(a+2) + (a+2) = (a+2)(a+1)$

$\Rightarrow A$ се дели на $a + 1$.

Обърнете внимание!

За да се дели A на $a + 1$, достатъчно е A да се представи като произведение от множители, единият от които да е $a + 1$. Тогава, ако $a + 1$ е 0, и $A = 0$.

Твърдението на задача 4 можем да докажем и без да разлагаме A на множители. Достатъчно е да проверим, че за $a = -1$ $A = 0$, за да твърдим, че A се дели на $a + 1$.

517 Да се докаже, че ако $a + b$ се дели на 3, то $a^3 + b^3$ се дели на 9, където a, b са цели числа.

Решение:

От $a + b$ се дели на 3 следва, че $a + b = 3k$.

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) =$

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2 + 2ab - 2ab) =$

$= (a+b)((a+b)^2 - 3ab)$

Заместваме $a + b$ с $3k$ и получаваме

$a^3 + b^3 = 3k((3k)^2 - 3ab) =$

$= 3k(9k^2 - 3ab) =$

$= 9k(3k^2 - ab)$.

$\Rightarrow$ $a^3 + b^3$ се дели на 9, при условие че $a + b$ се дели на 3.

518 Намерете най-голямата стойност на тричлена $U = -x^2 - 4x - 4$ и съответната стойност на променливата x.

519 Докажете, че при всяко цяло число a изразът $a^5 - a$ се дели на 5.

520 Докажете, че многочленът

$2a^2 + 3ab + a + b^2 + b$ се дели на $a + b$.

521 Проверете дали изразът

$A = x^2 + 21x^3 - x^4 - 20x + 1$ се дели на $x - 1$.

522 Докажете, че $n^4 + 4$ за всяко естествено число $n > 1$ е съставно число.

523 Докажете, че ако m е естествено число, то $m(m+1)(4m+5)$ се дели на 6.

524 Докажете, че ако $a + b$ се дели на 3, то $a^2 - b^2$ се дели на 3.

525 Разложете квадратните тричлени:

а) $x^2 + 6x + 8$;

б) $x^2 - 5x + 6$;

в) $x^2 - x - 12$.

Решение:

а) $x^2 + 6x + 8 = x^2 + 4x + 2x + 8 =$

$= x(x+4) + 2(x+4) = (x+4)(x+2)$

б) $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 =$

$= x(x-2) - 3(x-2) = (x-2)(x-3)$

в) $x^2 - x - 12 = x^2 - 3x + 4x - 12 =$

$= x(x-3) + 4(x-3) = (x-3)(x+4)$

Обърнете внимание!

При разлагане на квадратен тричлен членът от първа степен чрез съобразяване се представя по подходящ начин като сбор на два едночлена, така че полученият четиричлен да се разлага чрез групиране. Чрез този метод не можем да докажем, че даден квадратен тричлен е неразложим в множеството на рационалните числа.

526 Разложете чрез отделяне на точен квадрат квадратните тричлени:

а) $x^2 + 6x + 8$; б) $x^2 - 5x + 6$;

в) $x^2 - x - 12$; г) $2x^2 - 3x + 1$;

д) $x^2 - 2x - 12$.

Решение:

а) $x^2+6x+8=\underbrace{x^2+2x.3+3^2}-9+8=$

$=(x+3)^2-1^2=$
$=(x+3+1)(x+3-1)=$
$=(x+4)(x+2)$

б) $x^2-5x+6=\underbrace{x^2-2.x\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2}-\frac{25}{4}+6=$

$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{25}{4}-6\right)=$
$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25-24}{4}=$
$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=$
$=\left(x-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)=$
$=\left(x-\frac{4}{2}\right)\left(x-\frac{6}{2}\right)=$
$=(x-2)(x-3)$

в) $x^2-x-12=\underbrace{x^2-2x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{4}-12=$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1+48}{4}=$
$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2=$
$=\left(x-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\right)=$
$=\left(x+\frac{6}{2}\right)\left(x-\frac{8}{2}\right)=$
$=(x+3)(x-4)$

г) $2x^2-3x+1=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)=$

$=2\left(\underbrace{x^2-2.x\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2}-\frac{9}{16}+\frac{1}{2}\right)=$
$=2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9-8}{16}\right)=$
$=2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)=$
$=2\left(x-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=$
$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)=$
$=2\cdot\frac{2x-1}{2}(x-1)=$
$=(2x-1)(x-1)$

д) $x^2-2x-12=\underbrace{x^2-2x+1}-1-12=$

$=(x-1)^2-13.$

Обърнете внимание!

При решаване на първите четири примера, след като отделим точен квадрат, получаваме разлика от квадратите на двучлен и число, която се разлага чрез тъждеството $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

При решаване на пример д) числото 13 не е точен квадрат и не можем да приложим горното тъждество. Така доказваме, че квадратният тричлен $x^2-2x-12$ е неразложим в множеството на рационалните числа.

Ще разложим квадратния тричлен
$ax^2+bx+c,\ a\neq 0$
чрез отделяне на точен квадрат:

$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$
$=a\left(x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$
$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=$
$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right).$

Получаваме:

Ако b^2-4ac е точен квадрат, дадения квадратен тричлен може да се разложи на множители.

Ако b^2-4ac не е точен квадрат, дадения квадратен тричлен е неразложим в множеството на рационалните числа.

Разложете квадратните тричлени:

527 $x^2 + 2x - 15$.

528 $x^2 - 4x - 5$.

529 $x^2 - 7x + 12$.

530 $3x^2 - 5x + 7$.

531 $x^4 - 5x^2 + 4$.

532 $x^2 + 6x - 7$.

533 $x^2 + 4x - 5$.

534 $x^2 + 8x + 7$.

535 $x^2 - 6x + 5$.

536 $x^2 - 6x + 8$.

537 $x^2 - 8x + 24$.

538 $x^2 - 10x + 21$.

539 $x^2 + 2x - 15$.

540 $x^2 + 2x - 8$.

541 $x^2 + 2x - 24$.

542 $x^2 - 12x + 27$.

543 $x^2 + 12x - 13$.

544 $x^2 + 5x - 6$.

545 $x^2 + 3x - 4$.

546 $x^2 + 7x - 8$.

547 $x^2 + 9x + 8$.

548 $x^2 + 11x + 10$.

549 $x^2 - 11x + 10$.

550 $x^2 + x - 12$.

551 $x^2 + 3x - 18$.

552 $x^2 + 3x - 10$.

553 $x^2 - x - 30$.

554 $x^2 + x - 6$.

555 $x^2 - x - 20$.

556 $x^2 + x - 30$.

557 $x^2 + x - 42$.

558 $5x^2 - 3x - 2$.

559 $7x^2 - 8x + 1$.

560 $9x^2 - 7x - 2$.

561 $x^4 - 5x^2 + 4$.

562 $x^4 - 10x^2 + 9$.

563 $x^4 - 13x^2 + 36$.

564 $x^4 - 26x^2 + 25$.

565 $x^6 - 9x^3 + 8$.

566 $x^6 - 7x^3 - 8$.

567 $x^6 + 9x^3 + 8$.

568 $x^6 + 28x^3 + 27$.

569 $x^6 - 26x^3 - 27$.

570 $x^6 + 26x^3 - 27$.

571 Даден е изразът $A = \left(\frac{3x-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3-5x}{2}\right)^2$.

а) Намерете нормалния вид на израза A.

б) Разложете израза A на множители.

572 Даден е многочленът $A = x^2 - 6x + 12$.

а) Да се намери най-малката стойност на многочлена A;

б) Да се разложи на множители многочленът $B = A - 4$.

573 Даден е многочленът $A = x^2 + 4x + 8$.

а) Да се намери най-малката стойност на многочлена A;

б) Да се разложи на множители многочлен $B = A - 20$.

574 Дадени са многочлените

$A = x^2 + 1$, $B = -2x$ и $C = x^3 - 1$.

Разложете на множители многочлена:

а) $A + B - 4$;

б) $A + B + C$.

575 Дадени са многочлените

$A = x^2 - 9$, $B = 6x + 18$ и $C = x^3 + 27$.

Разложете на множители многочлена:

а) $A + B - 16$;

б) $C - 3A - 3B$.

В бланката за отговори са написани номерата на твърдението. Срещу всеки номер запишете „ДА”, ако твърдението е вярно, или „НЕ”, ако твърдението не е вярно.

576

№	Твърдение
(1)	$\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^4=\left(x^4+x^2+\frac{1}{4}\right)^2$
(2)	$(-x^2+x-1)^2=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$
(3)	$(x^2-4)^3=(x^3-8)^2$

Отг.

	Вярно ли е твърдението?
(1)	
(2)	
(3)	

577

№	Твърдение
(1)	$\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^4=\left(x^6-x^3+\frac{1}{4}\right)^2$
(2)	$(x^2-x+2)^2=x^4-2x^3+5x^2-4x+4$
(3)	$(x+1)^6=(x^2+2x+1)^4$

Отг.

	Вярно ли е твърдението?
(1)	
(2)	
(3)	

578

№	Твърдение
(1)	$\frac{x^3-y^3}{x-y}=(x+y)^2-xy,\ x\neq y$
(2)	$(x^2+x-2)^2=x^4+2x^3+3x^2-4x+4$
(3)	$(-x-1)^6=(x^3+3x^2+3x+1)^2$

Отг.

	Вярно ли е твърдението?
(1)	
(2)	
(3)	

579

№	Твърдение
(1)	$\left(\frac{x^2}{2}-1\right)^4=\left(\frac{x^4}{2}-x^2+1\right)^2$
(2)	$\left(\frac{-x^2+4x-1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\left(x^2-4x+1\right)^2$
(3)	$(4x^2-1)^2=(4x^2-4x+1)(4x^2+4x+1)$

Отг.

	Вярно ли е твърдението?
(1)	
(2)	
(3)	

580

№	Твърдение
(1)	$\left(\frac{x}{2}-1\right)^6=\left(\frac{x^2}{4}-x+1\right)^3$
(2)	$(x^3-8)^2=\left(x+2\right)^2\left(x^2-2x+4\right)^2$
(3)	$x^6-1=(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Отг.

	Вярно ли е твърдението?
(1)	
(2)	
(3)	

Абсолютна стойност (модул)

По определение

$|a| = \begin{cases} -a & \text{при } a < 0 \\ 0 & \text{при } a = 0 \\ a & \text{при } a > 0 \end{cases}$ или $|a| = \begin{cases} -a \text{ при } & a \le 0 \\ a \text{ при } & a \ge 0 \end{cases}$, защото при $a = 0$ както $-a = 0$, така и $a = 0$.

$|x-a| = \begin{cases} -(x-a) \text{ при } x-a<0, \text{ т.е. при } & x<a \\ 0 \text{ при } x-a=0, \text{ т.е. при } & x=a \\ x-a \text{ при } x-a>0, \text{ т.е. при } & x>a \end{cases}$ или $\begin{cases} |x-a| = x-a & \text{при } x \ge a \\ |x-a| = a-x & \text{при } x \le a \end{cases}$

$|a| = |-a| \qquad |a - x| = |x-a|$

581 Пресметнете:

а) $A = \frac{1}{2}|5-x| - \frac{3}{10}|x-1| - \frac{|x|}{5} + |-x|$ при $x = -10$;

б) $B = \frac{\left|x-\frac{1}{2}\right| - |-x+1|}{6} + \frac{1}{3}\left|(2x-1)^2\right| + |2-x|$ при $x = -\frac{1}{2}$.

Решение:

а) $A = \frac{1}{2}|5-(-10)| - \frac{3}{10}|-10-1| - \frac{|-10|}{5} + |-(-10)| =$

$= \frac{|15|}{2} - \frac{3|-11|}{10} - \frac{|-10|}{5} + |10| = \frac{15}{2} - \frac{3.11}{10} - \frac{10}{5} + 10 = 12,2$

б) $B = \frac{\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right| - \left|-\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right|}{6} + \frac{1}{3}\left|\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right)^2\right| + \left|2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right| =$

$= \frac{|-1| - \left|-\frac{3}{2}\right|}{6} + \frac{1}{3}(-2)^2 + \left|\frac{5}{2}\right| = \frac{1-\frac{3}{2}}{6} + \frac{4}{3} + \frac{5}{2} = 3\frac{3}{4}$

582 Опростете израза $A = |x+3| - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ при $x < -3$.

Решение:

От $x < -3 \Rightarrow x - (-3) < 0$, т.е. $x + 3 < 0$ и $|x+3| = -(x+3)$.

Тогава $A = |x+3| - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = -(x+3) - \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = -x^2 - 3\frac{1}{4}$.

583 Опростете израза $A = |x-1| - |x-5|$ при $1 \le x \le 5$.

Решение:

От $x \ge 1 \Rightarrow x - 1 \ge 0$ и $|x-1| = x-1$.

От $x < 5 \Rightarrow x - 5 < 0$ и $|x-5| = 5-x$.

Тогава $A = |x-1| - |x-5| = x - 1 - (5-x) = 2x - 6$,

$A = 2x - 6$. За $x = 1$ $A = -4$.

584 Запишете без знака за абсолютна стойност изразите:

а) $3a-2|a|$ при $a>0$, при $a<0$, при $a=0$;

б) $|x-5|$ при $x \geq 5$;

в) $|x-1|+|x-2|$ при $x<1$;

г) $|2x-a|$.

Решение:

а) При $a>0$ $|a|=a$ и $3a-2|a|=3a-2a=a$,
при $a<0$ $|a|=-a$ и $3a-2|a|=3a+2a=5a$,
при $a=0$ $|a|=0$ и $3a-2|a|=0$.

б) При $x \geq 5$ $x-5 \geq 0$ и $|x-5|=x-5$.

в) При $x<1$ $x-1<0$ и $|x-1|=1-x$,
при $x<1$ $x-2<1-2<0$ и $|x-2|=2-x$.
Тогава
$|x-1|+|x-2|=1-x+2-x=3-2x$.

г) $|2x-a|=\begin{cases} 2x-a \geq 0, & |2x-a|=2x-a \\ 2x-a \leq 0, & |2x-a|=a-2x \end{cases}$

$|2x-a|=\begin{cases} x \geq \dfrac{a}{2}, & |2x-a|=2x-a \\ x \leq \dfrac{a}{2}, & |2x-a|=a-2x \end{cases}$

585 Опростете израза $A=|x-2|-|x|+2$:

а) при $x=2$; б) при $x>2$;

в) при $x<2$.

Решение:

а) При $x=2$ $A=|2-2|-|2|+2=0-2+2=0$.

б) При $x>2$, $x-2>0$, $|x-2|=x-2$,
при $x>2$, $x>2>0$, $x>0$, $|x|=x$.

Тогава
$A=|x-2|-|x|+2=x-2-x+2=0$.

в) При $x<2$ $x-2<0$ и $|x-2|=2-x$,

при $x<2=\begin{cases} 0<x<2, & |x|=x \\ x<0, & |x|=-x. \end{cases}$

Тогава при $0<x<2$
$A=|x-2|-|x|+2=2-x-x+2=4-2x$,
при $x \leq 0$
$A=|x-2|-|x|+2=2-x+x+2=4$.

586 Пресметнете стойността на изразите:

а) $A=|6-x|-|1-x|$ при $x=5$;

б) $B=|6-x|-|5-x|$ при $x=-2$;

в) $C=|2x+1|-|1-3x|$ при $x=-5$.

Опростете изразите:

587 а) $A=|6-x|-|1-x|$ за $x>6$;

б) $B=|x-1|+2|1-x|$ за $x>1$.

588 а) $A=|6-x|$ при $x \geq 6$;

б) $B=|x-2|+|x-3|$ при $x \geq 5$;

в) $C=|x+2|-|3-x|$ при $x \leq -2$;

г) $C=|x+2|-|3-x|$ при $x \geq 3$;

д) $C=|x+2|-|3-x|$ при $-2 \leq x \leq 3$.

589 Напишете без знака за модул изразите:

а) $3|a|$; б) $|x-3|$;

в) $|x+1|$; г) $|3x-1|$.

Намерете най-малката стойност на израза A и стойностите на x и y, при които тя се получава:

590 $A=x^2+10x+y^2-6y+35$.

591 $A=x^2-4x+y^2-8y+45$.

592 $A=4x^2-4x+y^2-10y+9$.

593 $A=9x^2-6x+y^2-4y+10$.

594 $A=25x^2-10x+4y^2-4y+9$.

595 $A=16x^2+y^2-8x+12y+30$.

596 $A=36x^2+y^2-12x+16y+100$.

597 $A=49x^2+4y^2+14x-4y+30$.

598 $A=4x^2+9y^2+12x+30y+70$.

599 $A=9x^2+4y^2-30x+20y+60$.

600 $A=4x^2-12xy+10y^2-12y+5$.

601 $A=9x^2-6xy+10y^2-6y-4$.

602 $A=2x^2+4xy+4y^2+8x+26$.

603 $A=10x^2+12xy+4y^2-4x+11$.

604 $A=25x^2-10xy+2y^2-10y+17$.

605 $A=x^2+6xy+13y^2-12y+18$.

606 $A=13x^2-4xy+y^2-6x-4$.

607 $A=25x^2+30xy+25y^2-40x+28$.

608 Даден е многочленът

$A = x^2 + 4y^2 - 4x - 1$.

В бланката за отговори са написани номерата на твърдението. Под всеки номер запишете „ДА", ако твърдението е вярно, или „НЕ", ако твърдението **не е** вярно.

№	Твърдение	Вярно ли е твърдението?
(1)	Най-малката стойност на многочлена A е 5.	ДА/НЕ
(2)	Най-малката стойност на A се постига при $x = 2$ и $y = 0$.	ДА/НЕ
(3)	Ако $y = x$, то $A = (5x + 1)(x - 1)$.	ДА/НЕ

Отг.

(1)	(2)	(3)

609 Даден е многочленът

$A = x^2 - 4xy + 5y^2 + 10y + 12$.

В бланката за отговори са написани номерата на твърдението. Под всеки номер запишете „ДА", ако твърдението е вярно, или „НЕ", ако твърдението **не е** вярно.

№	Твърдение	Вярно ли е твърдението?
(1)	Най-малката стойност на многочлена A е 13.	ДА/НЕ
(2)	Най-малката стойност на A се постига при $x = 10$ и $y = -5$.	ДА/НЕ
(3)	Ако $y = x$, то $A = 2(x + 1)(x + 5)$.	ДА/НЕ

Отг.

(1)	(2)	(3)

610 Даден е многочленът

$A = x^2 - 6xy + 10y^2 + 10y - 15$.

В бланката за отговори са написани номерата на твърдението. Под всеки номер запишете „ДА", ако твърдението е вярно, или „НЕ", ако твърдението **не е** вярно.

№	Твърдение	Вярно ли е твърдението?
(1)	Най-малката стойност на многочлена A е 40.	ДА/НЕ
(2)	Най-малката стойност на A се постига при $x = -15$ и $y = -5$.	ДА/НЕ
(3)	Ако $y = x$, то $A = 5(x - 1)(x + 3)$.	ДА/НЕ

Отг.

(1)	(2)	(3)

611 Даден е многочленът

$A = 9x^2 + 4y^2 - 12x + 20y - 36$.

В бланката за отговори са написани номерата на твърдението. Под всеки номер запишете „ДА", ако твърдението е вярно, или „НЕ", ако твърдението **не е** вярно.

№	Твърдение	Вярно ли е твърдението?
(1)	Най-малката стойност на многочлена A е 65.	ДА/НЕ
(2)	Най-малката стойност на A се постига при $x = \frac{2}{3}$ и $y = -2\frac{1}{2}$	ДА/НЕ
(3)	Ако $x = 2y$, то $A = 4(10y + 9)(y - 1)$.	ДА/НЕ

Отг.

(1)	(2)	(3)

612 Даден е многочленът $A = 4x^2 - 4xy + 10y^2 + 6y - 16$.

В бланката за отговори са написани номерата на твърдението. Под всеки номер запишете „ДА”, ако твърдението е вярно, или „НЕ”, ако твърдението **не е** вярно.

№	Твърдение	Вярно ли е твърдението?
(1)	Най-малката стойност на многочлена A е 17.	ДА/НЕ
(2)	Най-малката стойност на A се постига при $x = -\frac{1}{6}$ и $y = -\frac{1}{3}$.	ДА/НЕ
(3)	Ако $x = y$, то $A = 2(y-1)(5y+8)$.	ДА/НЕ

Отг.

(1)	(2)	(3)

613 Даден е изразът $A = (2m + x)(x^2 - 3x + 2) - m(2x^3 - 3x - 1)$, където m е параметър. Ако $x = (-1)^{2019}$, намерете стойността на m, за която числената стойност на A е равна на $\left(\frac{2^3.3^{-4}}{2^4.3^{-3}}\right)^{-1}$.

614 Даден е изразът $A = (x - m)(x^2 - 2x + 3) - (x^2 - 1)(mx + 3) - m(3x - 2)$, където m е параметър. Приведете израза в нормален вид. При $x = (-1)^{2013}$ намерете числената стойност на израза A, ако коефициентът му на члена от втора степен е равен на $\frac{125^5 + 25^7 + 5^9.(-5)^4}{5^{15} - 6.(-5)^{13}}$.

615 Даден е изразът $A = (m - x)(-m + x)(x - m) + x(mx^2 - 2) - m(m^2 + x^2 - 3x + 3m - 1)$, където m е параметър. Приведете израза в нормален вид. Ако $x = (-1)^{2011}$, намерете стойността на m, за която числената стойност на A е равна на $\left(\frac{6^5.21^5.3^5}{81^4.14^5}\right)^{-1}$.

616 Приведете израза $A = (x - m)(x^2 + x - 4) - (x^2 - 3)(mx + 3) - 2m(x + 2)$ като многочлен в нормален вид. Намерете стойността на параметъра m, за която:

а) коефициентите на членовете от първа и втора степен са равни;

б) при $x = \frac{2^7 - 2^6 - 2^5}{2^4}$ числената стойност на израза A е равна на (–5).

617 Приведете израза $A = (x - 2m)(x^2 - 2x + 3) - (x^2 - 2)(2mx + 1) - 4m(2x - 3)$ като многочлен в нормален вид. Намерете стойността на параметъра m, за която:

а) коефициентите на членовете от първа и трета степен са равни;

б) при $x = \frac{(-1)^{2019} - (-1)^{2018}}{-|-2|}$ числената стойност на израза A е равна на (– 9).

618 При $x = \frac{5^3 - 5\,.\,15^2}{5^2 - 10\,.\,15 + 15^2}$ да се намери стойността на израза

$A = (x + m - 2)^2 - (x + m)(m - x) - (-x - 1)^2$,

ако коефициентът на члена от първа степен в нормалния вид на израза A е (–4).

619 Приведете израза $A = (2x - m)(x^2 + x - 3) - (x^2 + 4)(2mx - 1) + 3m(3x - 1)$ като многочлен в нормален вид. Намерете стойността на параметъра m, за която:

а) коефициентите на членовете от първа и трета степен са равни;

б) при $x = \dfrac{3^6 + 3^7 - 3^8}{2.3^6 + 3^7}$ числената стойност на израза A е равна на (– 22).

620 Даден е изразът $A = (x - 2m)^3 - (x - 2m)(x^2 + 2mx + 4m^2) - mx(x + 3m)$, където m е параметър.

а) Приведете израза в нормален вид.

б) За коя стойност на m коефициентът на члена от втора степен е 21?

621 Даден е изразът $A = (x + m)^3 - x(x - m)(x + m) - m^3$, където m е параметър.

а) Приведете израза в нормален вид.

б) За коя стойност на m коефициентът на члена от втора степен е 9?

622 Даден е изразът $A = (x - m)^3 - (x - m)(x^2 + xm + m^2) - 3mx(m + 3)$, където m е параметър.

а) Приведете израза в нормален вид.

б) За коя стойност на m коефициентът на члена от втора степен е 18?

623 При $x = -3$ намерете стойността на израза $A = (2x + m)^2 - (x + m)(m - x) - (3x - 1)^2$, ако коефициентът на члена от първа степен в нормалния вид на израза A е (-6).

624 При $x = (-1)^{2021}$ намерете стойността на израза $A = (2x + m)^2 - (x - 3m)(x + m) - (x - 3)^3$, ако коефициентът на члена от първа степен в нормалния му вид е (-15).

625 Даден е изразът $A = x(x - m - 2)^2 - (mx - 3m)(x^2 + 3x + 9)$, където m е параметър.

а) Приведете многочлена, тъждествено равен на израза A, в нормален вид.

б) При $x = 2$ намерете стойността на A, ако коефициентът на члена му от втора степен е 0.

626 Даден е изразът $A = (2x - y - 3)^2 - (3x + 2)(x - y) + y(x + 4)$.

а) Приведете многочлена, тъждествено равен на израза A, в нормален вид.

б) Намерете най-малката стойност на многочлена A.